МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО

УДК 539.3 DOI: https://doi.org/10.32515/2664-262X.2022.5(36).1.144-154

Л.М. Кривоблоцька, доц., канд. фіз.-мат. наук
Центральноукраїнський національний технічний університет, м. Кропивницький, Україна
e-mail:krivoblotsky19@gmail.com

Напружений стан гнучких пластин з отвором

Дана постановка і метод розв'язку класу задач з нелінійної механіки гнучких пластин з отвором; для цього сформульовані граничні умови; запропоновано метод розв'язку – розклад по безрозмірному параметру моментного навантаження; в результаті отримана послідовність лінійних граничних задач для визначення прогинів і функцій напружень для пластинки в довільному наближенні. Розв'язана неосесиметрична задача про згин гнучкої пластинки з отвором; одержано формули для обчислення прогинів і функції напружень.
безрозмірний параметр, геометрична нелінійність, гнучка пластина з отвором, прогини, функція напружень

Постановка проблеми. Сучасні сільськогосподарські машини, машини для виробництва та роздачі кормів по конструкції відносяться до одних з найбільш складних машин. Причому ця сільськогосподарська техніка працює в складних експлуатаційних умовах – сезонний характер роботи, агресивні середовища, посилений абразивний знос.. Вказані машини та механізми працюють в форсованому режимі, з великими вібраційними та динамічними навантаженнями. Розрахунки на міцність деталей машин та елементів конструкцій з концентраторами напружень в більшості випадків можна звести до розрахункових схем для плоскої нелінійної задачі і крайовим задачам теорії пластин і оболонок.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблемі концентрації напружень біля отвору пластин при їх розтягу, стиску або зсуву (в лінійної та нелінійної постановах) присвячені багаточисельні дослідження ряду вчених, серед яких слід назвати Г.М.Савіна, О.М.Гузя, О.С.Космодаміанського, Е.Ф.Бурмістрова, Н.П.Флейшмана, В.І.Тульчія та інші. Узагальнені результати по лінійній проблемі концентрації напружень представлені в монографіях [9-12].

Задачам пружного геометрично нелінійного згину пластин з отвором присвячено порівняно мало досліджень, оскільки при їх розв'язку зустрічається ряд принципових труднощів.

Головні з них полягають в тому, що при застосуванні ітераційних схем розв'язку довільного типу, суттєво збільщується на "нескінченності" порядок особливостей, які породжують початкові (лінійні) наближення. В кінцевому підсумку прогини, зусилля, моменти при відході від отвору катострофічно зростають. Причина цього феномену в тому, що суттєво розрізняються порядки диференціальних операторів лінійної

Саме квадратично нелінійні оператори спричиняють "намотування" порядків особливостей. До речі, якщо розглянути аналогічні задачі для випадку розтягу нескінченних пластин з отвором з урахуванням фізичної нелінійності, то вказані порядки однакові і вказане явище не має місця.

В зв’язку з цим виникла задача пошуку таких аналітичних методів розв’язку вказаної задачі, які б дозволили суттєво зменшити в шуканих розв’язках порядок сингулярностей на “нескінченності” і дали б можливість виконувати розрахунки силових характеристик в довільній точці пластини.

Постановка завдання. Розглянемо пластину товщини *h*, яка ослаблена криволінійним отвором з достатньо гладким контуром Г. Вважаємо, що в пластинці має місце чистий згин не тільки при малих, а і при порівняно великих прогинах. На рис. 1 схематично зображена модель досліджуваної системи і точки прикладання сил *F*, які викликають згинаючі моменти величини *M*. Будемо також припускати, що розмір отвору такої величини, при якому можна нехтувати впливом зовнішнього краю прикладання навантаження на напружено-деформований стан в околі отвору.

Іншими словами – зовнішнє навантаження прикладається на “нескінченності”.

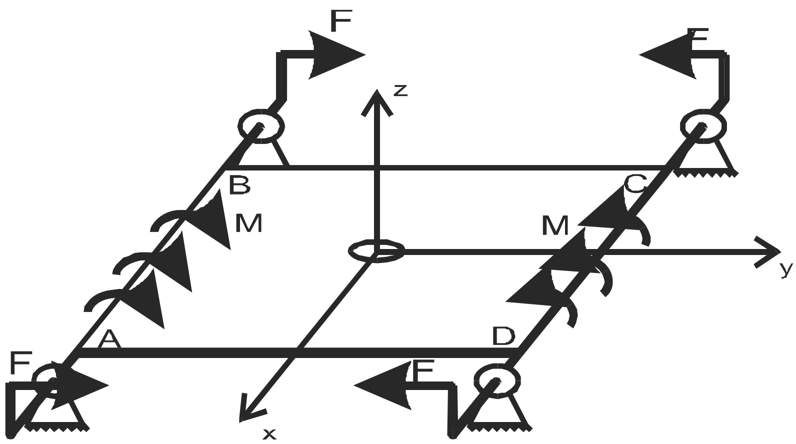

Рисунок 1 – Схема моделі досліджуваної системи

Ставиться задача: дослідити напружено-деформований стан біля отвору в припущенні, що пластина геометрично нелінійно згинається під дією вказаних моментів.

Виклад основного матеріалу. Для розв’язку задачі необхідно знайти функції прогинів $w(\alpha_1,\alpha_2)$ та функцію напружень $\Phi(\alpha_1,\alpha_2)$, які задовольняють відомим рівнянням Кармана :

$$Lw = \frac{1}{D}B(w,\Phi); \quad L\Phi = \frac{1}{2}EhB(w,\Phi), \tag{1}$$

де $B(w,\Phi)$ - білінійна диференційна форма форма виду

$$B(w,\Phi) = H_2wH_1\Phi + 2H_{12}wH_{12}\Phi + H_1wH_2\Phi \quad , \tag{2}$$

де H_1, H_2, H_{12} – лінійні диференціальні оператори такої аналітичної структури

$$H_1 \cdots = \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\ldots\right) + \frac{1}{A_1^2 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}; \quad H_2 = curl H_1;$$

$$H_{12} \cdots = \frac{1}{A_2}\left[-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\ldots\right) + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\ldots\right]. \tag{3}$$

Зусилля $T_{11}, T_{22}, T_{12} = T_{21}$, моменти $M_{11}, M_{22}, M_{12} = M_{21}$, кривизни визначаються через вказані оператори наступним чином:

$$\left.\begin{aligned} &T_{11} = H_1\Phi, \quad T_{12} = H_{12}\Phi; \\ &æ_{11} = -H_2 w, \; æ_{12} = H_{12} w; \\ &M_{11} = D(H_1 + \nu H_2)w, \quad M_{12} = -D(1-\nu)H_{12} w. \end{aligned}\right\}(curl). \tag{4}$$

Вираз для узагальнених перерізуючих зусиль можна представити через оператори H_1, H_2, H_{12} наступним чином:

$$Q_1^* = Q_1 w \qquad (curl), \tag{5}$$

$$Q_1 \cdots = \frac{1}{A_1 A_2}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2(H_1 + \nu\, H_2)\cdots) + (1-\nu)\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1 H_{12}\cdots)\right.$$

$$(curl)$$

$$\left. + (1-\nu)\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_2} H_{12}\cdots - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}(H_2 + \nu H_1)\cdots\right\} + (1-\nu)\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2} H_{12}\cdots$$

На контурі Γ шукані функції w та Φ повинні задовольняти наступним граничним умовам

$$\begin{aligned} &H_1\Phi\big|_L = 0, \quad H_{12}\Phi\big|_L = 0; \\ &(H_1 + \nu\, H_2)w\big|_L = 0; \qquad . \\ &Q_1 w\big|_L = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Крім цього, шукані функції повинні задовольняти умовам на «нескінченності», тобто наближатися до напруженого стану аналогічної пластини без отвору.

Розв’язок поставленої задачі можна знаходити різними варіантами методів ітерацій, серед яких використовуємо найбільш простий – метод розкладу по параметру [1].

Шукані функції w і Φ подаємо в вигляді наступних розкладів по параметру ε:

$$\begin{aligned} &w = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k-1} w_{2k-1}(\alpha_1, \alpha_2), \qquad \Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} \Phi_{2k}(\alpha_1, \alpha_2) \\ &T_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} T_{\alpha\beta,2k}(\alpha_1, \alpha_2); \qquad æ_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k-1} æ_{\alpha\beta,2k-1}(\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned} \quad . \tag{7}$$

Тут ε – безрозмірне значення параметра , за який приймаємо інтенсивність моментного навантаження на «нескінченності»:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\frac{\alpha^2 a^2}{h^4}M\,,\ M = \max(M_1, M_2).$$

Для визначення шуканих функцій $w_{2k-1}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\Phi_{2k}(\alpha_1, \alpha_2)$ $(k = 1,2,\ldots)$ отримуємо два типа лінійних граничних задач.

Якщо одержана певна кількість наближень в процесі розв'язку таких задач, то можна дослідити НДС при великих прогинах пластинки в довільній точці, в тому числі концентрацію моментів та зусиль в околі контуру Γ.

Метод малого параметра широко застосовували при розв'язуванні нелінійних задач теорії пластин і оболонок, в тому числв при розв'язуванні задач про концентрацію зусиль, моментів [2], [3], [6].

Поряд з декартовою системою координат введемо полярну систему, тобто положення довільної точки M серединної площини пластини до деформації будемо задавати координатами r та φ. Тоді в усіх співвідношеннях слід покладати $\alpha_1 = r$, $\alpha_2 = \varphi$.

У цьому випадку досліджувану нелінійну граничну задачу будемо формулювати у безрозмірному виді, в полярних координатах.

Маємо наступні рівняння рівноваги

$$\Delta^2\Delta^2\ w\, T_\rho æ_\rho + 2T_{\rho\varphi} æ_{\rho\varphi} + T_\varphi æ_\varphi = 0. \tag{8}$$

$$\Delta^2\Delta^2\Phi = \alpha^2 (æ_{\rho\varphi}^2 - æ_\rho æ_\varphi). \tag{9}$$

і граничні умови:

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2} + \nu\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)\right|_{\rho=1} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial\rho}\Delta^2 w + (1-\nu)\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)\right)\right|_{\rho=1} = 0; \tag{10}$$

$$\left.\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right|_{\rho=1} = 0\,; \qquad \left.\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\right|_{\rho=1} = 0\,.$$

До цих співвідношень необхідно додавати умови на «нескінченності»:

$$T_{\rho\rho}, T_\rho \to 0 \ \text{ при } \rho \to \infty;\ \ M_{\rho\rho} \to \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi);\ \ M_{\rho\varphi} \to \frac{1}{2}\sin 2\varphi \tag{11}$$

Зв'язок розмірних та безрозмірних (рисочка зверху) величин такий:

$$\overline{w} = \frac{w}{h}, \qquad \rho = \frac{r}{a}, \quad \alpha^2 = 12(1-\nu^2), \quad \overline{\Phi} = \frac{\alpha^2}{Eh^3}\Phi,$$
$$\overline{T}_\rho = \frac{a^2\alpha^2}{Eh^3}, \; \ldots, \; \overline{æ}_\rho = \frac{a^2}{h}æ_\rho, \; \ldots \overline{M}_\rho = \frac{\alpha^2 a^2}{Eh^4}M_r,$$

де a – радіус отвору;

$T_\rho, T_\varphi, T_{\rho\varphi}$ – відповідно радіальні, кільцеві та зсувні зусилля; аналогічного змісту позначення для моментів $M_\rho,\; M_\varphi,\; M_{\rho\varphi}$;

в подальшому рисочку над безрозмірними величинами відкидаємо.

Аналогічно (8) покладаємо

$$w = \sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty} \varepsilon^k w_k; \quad \Phi = \sum_{m=2,4,6\ldots}^{\infty} \Phi_m \varepsilon^m. \tag{12}$$

Для випадку застосування полярних координат граничні задачі зводяться до розгляду наступної послідовності граничних задач:

$$\begin{aligned} &\varepsilon : \Delta^2\Delta^2 w_1 = 0; \\ &\quad L_1 w_1\big|_{\rho=1} = 0; \qquad L_2 w_1\big|_{\rho=1} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 : \Delta^2\Delta^2 \Phi_2 = \alpha^2 (æ^2_{\rho\varphi,1} - æ_{\rho,1}\, æ_{\varphi,1}); \\ &\quad N_1 \Phi_2\big|_{\rho=1} = 0 \qquad N_{12} \Phi_2\big|_{\rho=1} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon^3 : \Delta^2\Delta^2 w_3 = -T_{\rho,2}æ_{\rho,1} - 2T_{\rho\varphi,2}æ_{\rho\varphi,1} - T_{\varphi,2}æ_{\varphi,1}; \\ &\quad L_1 w_3\big|_{\rho=1} = 0; \qquad L_2 w_3\big|_{\rho=1} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

і т.д.

В цих співвідношеннях $L_1\cdots, L_2\cdots, N_1\cdots, N_{12}\cdots$ – лінійні диференціальні оператори наступного типу:

$$L_1 \cdots = \frac{\partial^2 \cdots}{\partial \rho^2} + \nu\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \cdots}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \cdots}{\partial \rho}\right);$$
$$L_2 \cdots = \frac{\partial}{\partial \rho}\Delta^2 \cdots + (1-\nu)\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \cdots}{\partial \varphi^2}\right);$$
$$N_1 \cdots = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \cdots}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \cdots}{\partial \rho}; \qquad N_{12} \cdots = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \cdots}{\partial \phi}\right),$$

де Δ^2 – оператор Лапласа в полярних координатах.

При розв’язанні граничних задач (13) – (15) виникає необхідність на кажному кроці ітерації визначати загальні та частинні розв’язки бігармонічних рівнянь в полярних координатах. Вгадати ці представлення інколи буває важко, а головне – можна загубити деякі специфічні доданки. Для полегшення та стандартизації процедури обчислень виведемо спеціального виду формули для визначення вказаних розв’язків.

Стосовно розглядуваної проблеми доцільно розглядати, в силу механічної та геометричної симетрії, бігармонійне рівняння в полярних координатах з правою частиною наступного вигляду:

$$\Delta^2\Delta^2 u = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\rho)\cos m\varphi \qquad (m = 0,2,4\ldots), \tag{16}$$

де $f(\rho)$ – довільна обмежена на напівінтервалі ρ є $[1,\infty)$ функція.

Пропонується така послідовність одержання формул для частинних інтегралів.

Розглядаємо спочатку бігармонійне рівняння з правою частиною

$$\Delta^2\Delta^2 u_m = f_m(\rho)\cos m\theta \quad (m = 0,2,4,\ldots)\,, \tag{17}$$

де покладемо $\rho = e^{\xi}$, $u_m(\rho,\theta) = e^{k\xi}\widetilde{u}_m(\xi,\theta)$, $k \in N$ – довільне число.

Після перетворень отримуємо рівняння такого виду:

$$\frac{\partial^4\widetilde{u}_m}{\partial\xi^4} + 4(k-1)\frac{\partial^3\widetilde{u}_m}{\partial\xi^3} + 2(3k^2-6k+2)\frac{\partial^2\widetilde{u}_m}{\partial\xi^2} +$$
$$+4(k^2-3k+2)\frac{\partial\widetilde{u}_m}{\partial\xi} + k^2(k-2)\widetilde{u}_m + 2(k^2-2k+2)\frac{\partial^2\widetilde{u}_m}{\partial\theta^2} +$$
$$+4(k-1)\frac{\partial^3\widetilde{u}_m}{\partial\xi\partial\theta^2} + \quad +2\frac{\partial^4\widetilde{u}_m}{\partial\xi^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^4\widetilde{u}_m}{\partial\theta^4} = e^{(4-k)\xi} f_m(\xi)\cos m\theta,$$
$$(m = 0,2,4,\ldots;\, k \in N\,). \tag{18}$$

Функції $\widetilde{u}_m = \widetilde{u}_m(\xi,\theta)$ можна трактувати як деякі поверхні від вказанних змінних; на них розглянемо інтегральні криві $(\xi = const, \theta)$. Вони повинні задовольняти рівнянням

$$\frac{d^4u_m^*}{d\theta^4} + 2(k^2-2k+2)\frac{d^2u_m^*}{d\theta^2} + k^2(k-2)u_m^* = e^{(4-k)\xi} f_m(\xi)\cos m\theta \tag{19}$$

$$(m = 0,1,2\ldots;\, k \in N)\,.$$

Інтегруємо ці рівняння методом Лагранжа в припущені, що постійні інтегрування залежать від змінної ξ. При цьому необхідно розрізняти частинні випадки $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ та загальний випадок $k \neq 1$ та $k \neq 2$. Загальні інтеграли рівнянь (19), які ми отримуємо, потім «примушуємо» бути розв’язками більш загальних рівнянь (18) (за допомогою певного вибору згаданих постіних інтегрування). В результаті одержуємо системи звичайних диференціальних рівнянь для визначення постійних інтегрування. Маючи розв’язок цих рівнянь для вказаних значень $k \in N$ *і* $m = 0,2,4,\ldots$ в кінцевому результаті знайдемо загального вигляду формули для визначення загальних розв’язків однорідних рівнянь (17) та відповідні їм частинні інтеграли.

Так для $m = 0$ загальний розв’язок однорідного рівняння буде

$$\bar{u}_0 = A_{01}^0 + A_{02}^0 \ln\rho + A_{03}^0 \rho^2 + A_{04}^0 \rho^2 \ln\rho\,, \tag{20}$$

для $m = 2,4,6\ldots$ маємо

$$\bar{u}_m = (A_{m1}^0 \rho^m + \frac{A_{m2}^0}{\rho^{m-2}} + \frac{A_{m3}^0}{\rho^m} + A_{m4}^0 \rho^{m+2})\cos m\theta\ . \tag{21}$$

Відповідно для вказанних значень m отримуємо формули для визначення частинних інтегралів при довільному завданні функції вигляду $f(\rho)$:

$$u_0^* = \frac{1}{4}\Big[3\rho^2 \ln\rho \int \rho f_0(\rho)d\rho - \rho^2 \int \rho(1+\ln\rho)\, f_0(\rho)d\rho + \ln\rho \int \rho^3 f_0(\rho)d\rho -$$
$$- \int \rho^3 (\ln\rho - 1)\, f_0(\rho)d\rho\Big], \qquad (m = 0) \tag{22}$$

$$u_m^* = \frac{1}{8m(m^2-1)}\Big[-(m+1)\rho^m \int \rho^{3-m} f_m(\rho)d\rho -$$

$$-(m-1)\rho^{-m} \int \rho^{3+m} f_m(\rho)d\rho + (m+1)\rho^{-m+2} \int \rho^{m+1} f_m(\rho)d\rho +$$

$$+(m-1)\rho^{m+2} \int \rho^{1-m} f_m(\rho)d\rho\Big]\cos m\theta \quad (m = 2,4,6\ldots)\ . \tag{23}$$

Розглянемо задачу про згин моментами на «нескінченності» гнучкої пластинки з круглим отвором. Використовуючи формули (20) – (23) після громіздких обчислень, які тут випускаємо ([4], [5]) одержимо представлення загальних розв'язків граничних задач (13)-(15) в трьох наближеннях.

Маємо:

$$w = \varepsilon\Big\{a_2\rho^2 + b_2 \ln\rho + \big[a_0\rho^2 + a_1 + b_{-2}\rho^{-2}\big]\cos 2\varphi\ \Big\} +$$
$$+ \varepsilon^3\Big\{\sum_{k=0}^{3} a_{2k}^{(0)}\rho^{2k} + \sum_{k=1}^{2} b_{-2k}^{(0)}\rho^{-2k} + (\sum_{k=0}^{2} c_{2k}^{(0)}\rho^{2k} + \sum_{K=1}^{2} d_{-2k}^{(0)}\rho^{-2k})\ln\rho + \tag{24}$$

$$\Phi = \varepsilon^2\Big\{\sum_{k=0}^{2} e_{2k}^{(0)}\rho^{2k} + \sum_{k=1}^{2} g_{-2k}^{(0)}\rho^{-2k} + f_0^{(0)}\ln\rho + f_2^{(0)}\ln^2\rho +$$
$$+\Big[\sum_{k=0}^{1} e_{2k}^{(2)}\rho^{2k} + g_{-2}^{(2)}\rho^{-2} + \Big(\sum_{k=0}^{1} f_{2k}^{(2)}\rho^{2k} + h_{-2}^{(2)}\rho^{-2}\Big)\ln\rho\Big]\cos 2\varphi +$$
$$+\Big[\sum_{k=0}^{1} e_{2k}^{(4)}\rho^{2k} + \sum_{k=1}^{2} g_{-2k}^{(4)}\rho^{-2k}\Big]\cos 4\varphi\ \Big\}. \tag{25}$$

Наведемо деякі з цих коефіцієнтів, щоб мати представлення про їх аналітичну структуру.

$$a_{02}^{(0)} = d_{0,l2,0};\ d_{0,l2,0} = \frac{1}{8}N_{0,-4} + \frac{1}{8}N_{0,l,-4};\ N_{0,-4} = -2A_{02}a_5 + \frac{3}{8}B_2a_4 + \frac{1}{24}B_6a_1 - \frac{5}{16}B_4a_3 +$$
$$+\frac{1}{8}A_6a_2 - 4B_{02}a_3 - \frac{1}{4}A_4a_5;\quad N_{0,l-4} = -\frac{1}{2}A_4a_5 + \frac{1}{3}B_4a_3;\quad A_4 = 2a_3^2 + a_5^2;$$

$$B_2 = 4(a_1 a_5 - 2a_2 a_3); \quad A_6 = 24 a_3 a_4; \quad A_8 = 36 a_4^2; \quad B_4 = 4 a_3 a_5; \; B_6 = 12 a_4 a_5;$$

$$B_{02} = -\frac{3}{64} B_4; \quad A_{02} = -\frac{1}{4} A_4;$$

$$a_1 = \frac{-M}{4\,D(1-\nu)}; \; a_2 = \frac{-M}{4\,D(1+\nu)}; \; a_3 = \frac{-M}{2\,D(1-\nu)}; \; a_4 = \frac{-M}{4\,D(3+\nu)}; \; a_5 = \frac{-M}{2\,D(3+\nu)}.$$

На основі формули (24), (25) можна обчислювати в довільних точках різні силові і деформаційні характеристики пластинки: радіальні, зсувні і кільцеві зусилля, радіальні і кільцеві моменти та інше.

Так, наприклад, формула для обчислення кільцевих моментів має вид:

$$\begin{aligned} M_{\varphi\varphi} &= \varepsilon\left\{A_0 + B_{-2}\rho^{-2} + \left(C_0 + D_{-2}\rho^{-2} + D_{-4}\rho^{-4}\right)\cos 2\varphi\right\} + \\ &+ \varepsilon^3\left\{\sum_{k=0}^{2} A_{2k}^{(0)}\rho^{2k} + \sum_{k=1}^{3} B_{-2k}^{(0)}\rho^{-2k} + \left(\sum_{k=0}^{1} C_{2k}^{(0)}\rho^{2k} + \sum_{k=1}^{3} D_{-2k}^{(0)}\rho^{-2k}\right)\ln\rho + \right. \\ &+ \left(E_0^{(0)} + E_{-2}^{(0)}\rho^{-2}\right)\ln^2\rho + \left[\sum_{k=0}^{2} A_{2k}^{(2)}\rho^{2k} + \sum_{k=1}^{4} B_{-2k}^{(2)}\rho^{-2k} + \left(\sum_{k=0}^{1} C_{2k}^{(2)}\rho^{2k} + \right.\right. \\ &+ \left.\left.\sum_{k=1}^{2} D_{-2k}^{(0)}\rho^{-2k}\right)\ln\rho + \left(E_0^{(2)} + E_{-4}^{(2)}\rho^{-4}\right)\ln^2\rho\right]\cos 2\varphi + \left[\sum_{k=0}^{1} A_{2k}^{(4)}\rho^{2k} + \right. \\ &+ \left.\sum_{k=1}^{3} B_{-2k}^{(4)}\rho^{-2k} + \left(\sum_{k=0}^{1} C_{2k}^{(4)}\rho^{2k} + \sum_{k=1}^{3} D_{-2k}^{(4)}\rho^{-2k}\right)\ln\rho\right]\cos 4\varphi + \\ &+ \left.\left(\sum_{k=0}^{1} A_{2k}^{(6)}\rho^{2k} + \sum_{k=2}^{4} B_{-2k}^{(6)}\rho^{-2k}\right)\cos 6\varphi\right\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Вже з аналізу отриманих виразів для w, $M_{\varphi\varphi}$ бачимо,що вони містять доданки з співмножниками $\rho^4; \rho^2; \ln\rho; \rho^2\ln\rho; \ln^2\rho.$ Порядок такого типу особливостей (при $\rho \to \infty$) суттєво зростає з номером наближень. Звідки випливає, що силові характеристики на «нескінченності» будуть неперервно зростати.

Бачимо, що маємо справу з розбіжними рядами, які в подальшому намагаємося використовувати для обчислень різного типу характеристики НДС. Розбіжні ряди вперше почав використовувати Л.Ейлер в обчисленнях і в теорії аналітичного продовження функцій комплексного змінного. Так, в книзі [15] взнаємо наступну інформацію:

“Ця Ейлерова ідея – використання розбіжних рядів – одна з небагатьох, що замість визнання – зустріла у наступних поколінь математиків – рішучий опір, як абсолютнот хибна”… “Тільки подальший розвиток математики в напрямі Вейєрштрасової теорії аналітичних функцій дає змогу оборонити Ейлерові позиції і в справах розбіжних рядів”.

Наступний рішучий вклад у використанні розбіжних ітераційних процесів зробив математичний гігант початку XX століття А.Пуанкаре. в працях [13], [14], він у свій час писав: “Итак, мы должны рассмотреть соотношение новой природы, которое может существовать между функцмей аргументов x и μ, которую мы будем обозначать символом $\varphi\,(x,\mu)$, и расходящимся рядом по степеням μ,

$$f_0 + \mu\, f_1 + \mu^2 f_3 + \ldots + \ldots \mu^p x^p + \ldots$$

"Астрономы сказали бы, что этот ряд сходится и что он представляет функцию μ. Они постоянно имеют дело с рядами, которые формально удовлетворяют дифференциальным уравнения, и оставляют вопрос о сходимости этих рядов. На первый взгляд такой подход кажется совершенно незаконным. И тем не менее такой подход часто приводит к цели (підкреслено нами).

Чтобы объяснить, в чём здесь дело, необходимо более подробно остановиться на этом вопросе. Именно это я и собираюсь сделать".

В подальшому систематична теорія розбіжних рядів була викладена у фундаментальній монографії Харди Г. [7]. Широко розбіжні ряди зустрічаються і використовуються в різних варіантах теорії поля ; досить, наприклад, навести статтю [12] і наведені в ній наукові джерела.

Теорії підсумовування рядів типу Фур'є по системі функцій, що є розв'язками спеціального типу граничної задачі, присвячено дослідження А.Н.Тіхонова [8]. Він виходить з того, що коефіцієнти Фур'є завжди визначаються з певною похибкою і тому ряди Фур'є за цими коефіцієнтами є розбіжними. Використовуючи створену ним теорію розв'язування некоректних проблем, А.Н.Тіхонов в остаточному рахунку побудував спеціальний метод підсумовування вказаних рядів Фур'є.

Висновки. Дана постановка і метод розв'язання нового класу задач з нелінійної механіки гнучких пластин з отвором; для цього сформульовані у спеціальній формі рівняння Кармана і відповідні граничні умови; запропоновано метод розв'язку – розклад по безрозмірному параметру моментного навантаження на «нескінченності» деформаційних і силових характеристик; в результаті отримана послідовність лінійних граничних задач для визначення прогинів і функцій напружень для пластинки в довільному наближенні.

Розв'язана аналітично в трьох наближеннях неосесиметрична задача про згин гнучкої пластинки з отвором; одержано в загальному виді формули для обчислення прогинів і функції напружень. Підтверджено на основі одержаних розв'язків наявність сингулярностей в ітераціях, які обумовлюють зростання прогинів і силових характеристик не тільки при $\rho \to \infty$, а і з ростом номера наближення (ітерації). Історичний досвід показує, що ці два-три наближення в багатьох випадках визначають розв'язки задач, придатні в практичному сенсі. Відомо, що з розбіжними рядами як математичними об'єктами спеціальної природи необхідно поводитися по особливим правилам і законам. Наприклад, застосування особливого підсумовування в роботі Харді [7] дозволяє успішно використовувати такі ряди для проведення відповідних обчислень.

Список літератури

1. Каюк Я.Ф., Алексеева М.К. О методе разложения по параметру в задачах изгиба гибких пластин и оболочек . *Прикладна механіка*. 1979. 15, № 8. С. 63-68.
2. Каюк Я.Ф., Ващенко Л.Ф. Геометрически нелинейное деформирование мягких оболочек под несимметричной нагрузкой . *Прикладная механика*. 1980. 16, № 8. С. 16-23.
3. Каюк Я.Ф., Хижняк В.К. Метод квазилинеаризации в некоторых нелинейных задачах механики . *Прикладная механика*. 1981. 17, № 5. С. 25-32.
4. Каюк Я.Ф., Кривоблоцкая Л.Н. Метод регуляризации сингулярных итераций в нелинейных задачах изгиба пластин с отверстием . *Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки*. 2002. Вип. 1. С. 83-90.
5. Каюк Я.Ф., Кривоблоцкая Л.Н. Концентрация моментов в окрестности круглого отвестия пластины при больших изгибах . *Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки*. 2002. Вип. 2. С. 187-191.
6. Каюк Я.Ф., Кривоблоцкая Л.Н. Сингулярные итерации в нелинейных задачах концентрации напряжений . *Теорет. и прикладная механика*. 2002. Вып. 36. С.98-108.

7. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: Издательство иностранной литературы, 1951. 273 с.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Физматгиз, 1986. 287 с.
9. Савин Г.Н., Гузь А.Н., Цурпал И.А. Физически нелинейные задачи пластин и оболочек, ослабленных отверстиями . Труды школы по нелинейным задачам. Тарту: Изд-во Тартусского ун-та, 1966. С. 204-234.
10. Савин Г.Н., Флейшман Н.П. Пластинки и оболочки в рёбрами жесткости. Киев: Наукова думка. 383 с.
11. Савін Г.М., Тульчій В.І. Довідник з концентрації напружень. Київ: Вища школа, 1976. 410 с.
12. Проблемы механики: сб. статей ; под ред. Х. Драйдена, Т. Кармана. М.: Изд-во иностр. лит, 1959. 340 с.
13. Пуанкаре А. Избранные труды, I, Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. С. 335-340.
14. Пуанкаре А. Лекции по небесной механике. М.: Наука, 1965. 537 с.
15. Кравчук М. Вплив Ейлера на подальший розвиток математики. Київ, видавн. Всеукраїнської Акад. наук. 1935// Науковопопулярні праці, вид. КПІ, 2000. С.54-56.

References

1. Kaiuk, Ya.F. & Alekseieva, M.K. (1979). O metode razlozheniia po parametru v zadachakh izgiba gibkikh plastin i obolochek [On the parameter expansion method in the problems of planes and shells bending]. *Prykladna mekhanika – Applied Mechanics, 8*, 63-68 [in Russian].
2. Kaiuk, Ya.F. & Vashchenko, L.F. (1980). Geometricheski nelineinoie deformirovaniie miahkikh obolochek pod nesimmetrichnoi nagruzkoi [Geometrically nonlinear deformation of soft shells under asymmetric load]. *Prykladnaia mekhanika – Applied Mechanics, 8*, 16-23 [in Russian].
3. Kaiuk, Ya.F. & Khyzhniak, V.K. (1981). Metod kvazilinearizatsii v nekotorykh nelineinykh zadachakh mekhaniki [Method of quasi-linearization in some nonlinear problems of mechanics]. *Prykladnaia mekhanika – Applied Mechanics, 5,* 25-32 [in Russian].
4. Kaiuk, Ya.F. & Krivoblotskaya, L.N. (2002). Metod regularizatsii singuliarnykh iteratsii v nelineinykh zadachakh izgiba plastin s otverstiiem [Method of regularization of singular iterations in nonlinear problems of bending of plates with a hole]. *Visnyk Donetskoho universytetu – Bulletin of Donetsk University, ser. A: Pryrodnychi nauky – Natural Sciences, issue 1*, 83-90 [in Russian].
5. Kaiuk, Ya.F. & Krivoblotskaya, L.N. (2002). Kontsentratsiya momentov v okrestnosti kruglogo otvestiya plastiny pri bol'shikh izgibakh [The concentration of moments in the vicinity of the round hole of the plate at large bends]. *Visnyk Donetskoho universytetu – Bulletin of Donetsk University, ser. A: Pryrodnychi nauky – Natural Sciences, issue 2,* 187-191 [in Russian].
6. Kaiuk, Ya.F. & Krivoblotskaya, L.N. (2002). Singulyarnyie iteratsii v nelineynykh zadachakh kontsentratsii napryazheniy [Singular Iterations in Nonlinear Stress Concentration Problems]. *Teoreticheskaia i prikladnaia mekhanika – Theoretical and Applied Mechanics, issue 36*, 98-108 [in Russian].
7. Hardy, G. (1951). *Raskhodiashchiiesia riady* [*Divergent Series*]. Moscow: Izdatelstvo inostrannoi literatury [in Russian].
8. Tikhonov, A.N. & Arsenin, V.Ya. (1986) *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [*Methods for incorrect problems solving*]. Moscow: Fizmatgiz [in Russian].
9. Savin, G.N. & Guz, A.N., Tsurpal I.A. (1966). *Fizicheski nelineinyie zadachi plastin i obolochek, oslablennykh otverstiiami [Physically nonlinear problems of plates and shells weakened by holes//Proceedings of the school on nonlinear problems*]. Tartu: Izdatelstvo Tartusskogo universiteta [in Russian].
10. Savin, G.N. & Fleishman (N.d.). *Plastinki i obolochki s riobrami zhestkosti* [*Plates and shells with stiffening ribs*]. Kyiv: Naukova dumka [in Russian].
11. Savin, G.M. & Tulchii, V.I. (1976). *Dovidnyk z kontsentratsii napruzhen* [*Stress Concentration Handbook*]. Kyiv: Vyshcha shkola [in Ukrainian].
12. Dryden, H. & Karman, T. (Eds.). (1959). *Problemy mekhaniki* [*Problems of mechanics*]. Moscow: Izdatelstvo inostrannoi literatury [in Russian].
13. Poincare, A. (1971). *Novyie metody nebesnoi mekhaniki. Izbrannyie trudy* [*New methods of celestial mechanics. Selected works*]. (Vol. I). Moscow: Nauka [in Russian].
14. Poincare, A. (1965). *Lektsii po nebesnoi mekhanike* [*Lectures on celestial mechanics*]. Moscow: Nauka [in Russian].
15. Kravchuk, M. (2000). *Vplyv Eilera na podalshyi rozvytok matematyky* [*The influence of Euler on the further development of mathematics*]. Kyiv: vydavnytstvo Vseukrainskoi Akademii nauk [in Ukrainian].

Larysa Kryvoblotska, Assoc. Prof., PhD in Physics and Mathematics
Central Ukrainian National Technical University, Kropyvnytskyi, Ukraine

Stress State of Flexible Plates with a Hole

The article is dedicated to solving of problems of nonlinear mechanics of plates and shells – problems about stress-deformed state of flexible plates with hole under action of moment loading on “infinity”.

Solve of problems is offered to find with method of expansion of parameter of the external loading. During the solving was determined, that the value of bending and power descriptions unlimitedly increase at breaking from the edge of hole. For elaboration of regularization methods was conducted the survey and analysis of problems from different fields of mechanics. On the basis of this survey was formed the new approach to the solving of problem of regularization: it is offered to change the usual notions about particular sum of series and methods of their summing. It is created such methods of linear and nonlinear summing, when in summable functions the arbitrary parameters and functions enter. On basis of this method was solved the new geometrical-nonlinear problems of plates and shells mechanics in nonaxes-symmetrical axes-symmetrical arrangement about bending on “infinity” with moment loading of plates with hole. It is established, that the finding numeral data, diagrams do not conflict with the usual notions about stress-deformed conditions of plates with hole; definite mechanical effects are got. The methods of regularization are approved on test problems.

It is grounded mathematically, that the got solutions to equilibrium equations with some asymptotical exactness and exactly to the linear limit conditions, if the operators of initial problem will be polylinear.

dimensionless parameter, geometric nonlinearity, flexible plate with a hole, deflections, stress function

Одержано (Received) 16.03.2022 *Прорецензовано (Reviewed) 24.03.2022*
Прийнято до друку (Approved) 31.03.2022

УДК 629.113.5.62-592 DOI: https://doi.org/10.32515/2664-262X.2022.5(36).1.154-160

В.О. Дубовик, доц., канд. техн. наук, **О.Л. Пузирьов,** доц., канд. техн. наук,
Ю.А. Невдаха, доц., канд. техн. наук, **В.В. Пукалов,** доц., канд. техн. наук
Центральноукраїнський національний технічний університет, м. Кропивницький, Україна
e-mai: zenesperanto@gmail.com

Експериментальні дослідження двоструменевого способу захисту розплавленого металу при наплавленні в середовищі CO_2

Зварювання і наплавлення в середовищі захисних газів займає перше місце за об’ємом наплавленого металу і виготовленої продукції серед інших механізованих способів дугового зварювання. В роботі розглядаються різні способи захисту зони плавлення металу шляхом витиснення повітря із зони горіння дуги. Наводяться результати порівняльних досліджень захисних властивостей газового струменя пальників різних конструкцій. Розглядаються технологічні схеми захисту двошвидкісним струменем CO_2 пальниками конічного і циліндричного перерізу. Наводяться рекомендації по швидкісним параметрам захисного газу, який витікає з центрального і периферійного перерізу пальника. Дослідження спрямовані на забезпечення ефективного захисту розплавленого металу від азоту повітря, а також зменшення витрати захисного газу при цьому.

зварювання, наплавлення, шов, покриття, захисний газ, газовий захист, електрична дуга, зона термічного впливу, потенційне ядро

Постановка проблеми. Технології зварювання та наплавлення в середовищі захисних газів отримали широке розповсюдження в промисловості при виготовленні конструкцій та відновленні працездатності деталей машин. Основними їх перевагами