АВТОМАТИЗАЦІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 681.513.5 DOI: https://doi.org/10.32515/2664-262X.2020.3(34).143-162

О.П. Лобок, доц., канд. фіз.-мат. наук, **Б.М. Гончаренко**, проф., д-р техн. наук
Національний університет харчових технологій, м. Київ, Україна
e-mail: GoncharenkoBN@i.ua
Л.Г. Віхрова, проф., канд. техн. наук
Центральноукраїнський національний технічний університет, м. Кропивницький, Україна

Зведення задачі мінімаксного керування лінійними нестаціонарними системами до H^{∞} – робастного шляхом динамічної гри

В роботі розв'язана задача синтезу мінімаксного керування для динамічних, описаних системою лінійних диференційних рівнянь (з врахуванням стану, керувань, збурень та початкових умов, з наведеним рівнянням спостереження включно)об'єктів,що функціонують у відповідності з інтегрально-квадратичним критерієм якості в умовах невизначенності.

Припускалося, що зовнішні збурення, похибки та початкові умови належать певній множині невизначеностей. Задача пошуку оптимального керування у вигляді зворотного по виходу об'єктазв'язку, який мінімізує критерій функціонування, представлена у вигляді мінімаксної задачі оптимального керування за умов невизначеностей. За відсутності готових шляхів розв'язання показане зведення даної задачі до задачі H^{∞}-керування при найбільш несприятливих збуреннях, а крім того і до динамічної ігрової задачі з нульовою сумою та визначеною ціною гри, та наведена стратегія її розв'язання, щопропонує шлях до нових результатів.

Завдання пошуку оптимального керування і початкового стану, які максимізують критерій якості, розглянуто в рамках оптимізаційної задачі, яку розв'язано методом множників Лагранжа після введення допоміжної скалярної функції – гамільтоніана. Показано, що для знаходження максимального значення критерію може бути використана або необхідна умова екстремуму першого роду, що залежить від співвідношення першої варіації критерію та перших варіацій векторів керування і початкового стану або також необхідна умова екстремуму другого роду, що залежить від знаку другої варіації. Приведені для перших та другихваріацій формули, які можуть використовуватися для розрахунків.

Запропоновано задачу пошуку керування розв'язувати в два етапи: пошук проміжного розв'язку при фіксованих значеннях векторів керування та похибки і наступний пошук остаточного оптимального керування. Розглянуте також розв'язання H^{∞}-оптимальногокерування на нескінченому часі з врахуванням сигналу з виходу компенсатора, а також – розв'язання відповідних матричних алгебраїчних рівнянь типу Рікатті.

мінімаксне керування, робастність, системи з невизначеностями, оптимізація, динамічна гра, матрична форма

А.П. Лобок, доц., канд. физ.-мат. наук, **Б.Н. Гончаренко**, проф., д-р техн. наук
Национальный университет пищевых технологий, г. Киев, Украина
Л.Г. Вихрова, проф., канд. техн. наук
Центральноукраинский национальный технический университет, г. Кропивницкий, Украина

Сведение минимаксной задачи управления линейной нестационарной системой к H^{∞} - робастному путем динамической игры

В работе решена задача синтеза минимаксного управления для динамических, описанных системой линейных дифференциальных уравнений с учетом состояния, управления, возмущений, начальных условий и приведенного уравнения наблюдения включительно, объектов, функционирующих в соответствии с интегрально-квадратичным критерием качества.

Предполагалось, что внешние возмущения, погрешности и начальные условия принадлежат некоторому множеству неопределенностей. Задача поиска оптимального управления в виде обратной по выходу связи, которая минимизирует критерий функционирования, представлена в виде минимаксной задачи оптимального управления в условиях неопределенности. При отсутствии готовых путей решения показано сведение данной задачи к задаче H^{∞}-управления при наиболее неблагоприятных возмущениях, а кроме того, к динамической игровой задаче с нулевого суммой и определенной ценой игры, и приведена стратегия ее решения, предлагающая путь к новым результатам.

Задача поиска оптимального управления и начального состояния, которые максимизируют критерий качества, рассмотрена в рамках оптимизационной задачи, решенной методом множителей Лагранжа после введения вспомогательной скалярной функции - гамильтониана. Показано, что для нахождения максимального значения критерия может быть использовано или необходимое условие экстремума первого рода, которое зависит от соотношения первой вариации критерия и первых вариаций векторов управления и начального состояния или также необходимое условие экстремума второго рода, которое зависит от знака второй вариации. Для первых и вторых вариаций приведены формулы, которые могут использоваться для расчетов.

Предложено задачу поиска минимаксного управления решать в два этапа: поиск промежуточного решения при фиксированных значениях векторов управления и погрешности и последующий поиск окончательного оптимального управления. Рассмотрено также нахождение оптимального управления на бесконечном отрезке времени с учетом сигнала с выхода компенсатора, а также– решения соответствующих матричных уравнений типа Рикатти.

минимаксное управления, робастность, системы с неопределенностями, оптимизация, динамическая игра, матричная форма

Постановка проблеми. Початково основними результатами досліджень лінійних систем автоматичного керування були поняття стійкості та її критеріїв на базі характеристичних поліномів. Згодом з розвитком радіотехніки та електронних автоматичних систем основними стали частотні методи досліджень, які пізніше поширилися на імпульсні, дискретні та нелінійні системи у зв’язку з розвитком обчислювальної техніки. Прогрес космонавтики привів до досліджень автоматичних систем у просторі станів, виникла ідея оптимізації систем керування з одночасною оптимізацією їх показників якості.

Наступний прогрес дозволив об’єднати частотні з методами досліджень простору станів, що крім оптимізаційних дало можливість розв’зувати задачі з будь-якими невизначеностями – робастне керування. При цьому невизначеність частотної характеристики об’єктів керування обмежена в H^{∞}-нормі і може задаватись як в параметричній, так і у матричній формі при описі в просторі станів [1].

Для умов невизначеностей плідним є застосування мінімаксного підходу, коли знаходиться оптимальний регулятор за станом об’єкта, який функціонує в умовах невизначеності так, що він забезпечує *мінімізацію максимальної* похибки (відхилення поточного стану системи від заданого або бажаного) з множини можливих значень з врахуванням найбільш несприятливих збурень, що можуть діяти на об’єкт або систему. Проте шлях розв’язання вказаної задачі не завжди є очевидним [2], а його пошук вимагає додаткових досліджень.

Розглянемо динамічний об'єкт, описуваний наступною системою диференціальних рівнянь [3]

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + F_w(t)w(t), \qquad t_0 < t < T, \\ x(t_0) = F_0 x_0, \end{cases} \tag{1}$$

де $x(t) \in R^{n_x}$ – вектор стану; $u(t) \in R^{n_u}$ – вектор керування; $w(t) \in R^{n_w}$ – невідомий вектор зовнішніх збурень, що діють на объект; $x_0 \in R^{n_0}$ – невідомий вектор початкових умов; $A(t) \in R^{n_x \times n_x}$, $B(t) \in R^{n_x \times n_u}$, $F_w(t) \in R^{n_x \times n_w}$, $F_0 \in R^{n_x \times n_0}$ – задані матриці відповідних розмірностей.

Нехай над об'єктом проводяться спостереження, які описуються рівнянням

$$y(t) = C(t)x(t) + F_v(t)v(t), \quad (2)$$

де $y(t) \in R^{n_y}$ – результат спостереження; $v(t) \in R^{n_v}$ – невідомі похибки (завади) вимірювань; $C(t) \in R^{n_y \times n_x}$, $F_v(t) \in R^{n_y \times n_v}$ – відомі матриці.

Розглянемо і виберемо інтегрально-квадратичний критерій якості функціонування об'єкта у вигляді

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} \left(x^T(t)G_x(t)x(t) + u^T(t)G_u(t)u(t) \right) dt + x^T(T)G_f x(T), \quad (3)$$

де $G_x(t) \in R^{n_x \times n_x}$, $G_u(t) \in R^{n_u \times n_u}$, $G_f \in R^{n_x \times n_x}$ – задані симметричні вагові матриці, причому припускається, що вони задовільняють умови $G_x(t) = G_x^T(t) \ge 0$, $G_u(t) = G_u^T(t) > 0$, $G_f = G_f^T \ge 0$.

Тут " T " – означає операцію транспонування матриці, $G = G^T$ – означає, що матриця G симетрична, $G > 0$ ($G \ge 0$) –умова позитивної (невід’ємної) визначеності матриці, тобто матриця G має позитивні або невід'ємні власні значення.

Щодо невідомого вектора зовнішніх збурень $w(t)$, вектора похибок вимірювань $v(t)$ і вектора початкових умов x_0 передбачається, що вони належать до наступної множини допустимих збурень (невизначеностей)

$$\Omega_\xi = \left\{ \xi : \ \xi = (w(t), v(t), x_0), \ w(t) \in L_2(t_0, T), \ v(t) \in L_2(t_0, T), \ x_0 \in R^{n_0}; \ \| \xi \|^2 \le 1 \right\}, \quad (4)$$

де норма $\| \xi \|$ векторнозначної функції ξ визначається наступним виразом

$$\| \xi \|^2 = \int_{t_0}^{T} \left(w^T(t)R_w(t)w(t) + v^T(t)R_v(t)v(t) \right) dt + \left(x_0 - \hat{x}_0 \right)^T R_0 \left(x_0 - \hat{x}_0 \right), \quad (5)$$

в якому $R_w(t) \in R^{n_w \times n_w}$, $R_v(t) \in R^{n_v \times n_v}$, $R_0 \in R^{n_0 \times n_0}$ – задані вагові матриці, причому $R_w(t) = R_w^T(t) \ge 0$, $R_v(t) = R_v^T(t) > 0$, $R_0 = R_0^T \ge 0$, $\hat{x}_0 \in R^{n_0}$ – відомий вектор, в околі якого знаходиться невідомий вектор x_0 початкової умови [4].

Крім цього в (4) через $L_2(t_0, T)$ позначена множина інтегрованих з квадратом векторних функцій, тобто

$$L_2(t_0, T) = \left\{ f(t) \in R^n : \int_{t_0}^{T} f^T(t) f(t) dt = \int_{t_0}^{T} \| f(t) \|^2 \, dt < \infty \right\}.$$

Постановка завдання. Сформулюємо тепер постановку задачі. Завдання полягає в тому, щоб знайти оптимальне керування $u(t)$ у вигляді зворотного зв'язку по виходу $y(t)$, яке мінімізує функціонал (3) при найбільш несприятливих збуреннях $\xi = (w(t), v(t), x_0)$, що діють на об'єкт і в каналі спостереження.

Формалізовано це завдання можна представити у вигляді мінімаксної задачі оптимального керування

$$\inf_u \sup_{\xi \in \Omega_\xi} I(u), \tag{6}$$

де $I(u)$ – функціонал виду (3);

Ω_ξ – множина допустимих невизначеностей (4).

Розв’язування даного завдання зручно звести до задачі H^∞ - керування. Для цього спочатку перетворимо відповідним чином критерій якості (3), а потім розглянемо доцільність деяких припущень, що дозволяють розв’язати задачу.

Виклад основного матеріалу. Відомо [5], що будь-яку симетричну невід’ємно визначену матрицю можна факторизувати, тобто представити у вигляді $G = G^{1/2} \cdot G^{1/2}$, де симетрична матриця $G^{1/2}$ може бути знайдена за допомогою процедури Холецкого або через власні значення і вектора матриці
G. Тож уявімо вагові матриці $G_x(t)$, $G_u(t)$, G_f функціоналу (3) у вигляді

$$G_x(t) = G_x^{1/2}(t) \cdot G_x^{1/2}(t), \quad G_u(t) = G_u^{1/2}(t) \cdot G_u^{1/2}(t), \quad G_f = G_f^{1/2} \cdot G_f^{1/2}. \tag{7}$$

Тоді критерій (3) можна перетворити таким чином

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} \left(x^T(t) G_x^{1/2}(t) G_x^{1/2}(t) x(t) + u^T(t) G_u^{1/2}(t) G_u^{1/2}(t) u(t) \right) dt + x^T(T) G_f^{1/2} G_f^{1/2} x(T) =$$

$$= \int_{t_0}^{T} z^T(t) z(t) dt + z^T(T) z(T) = \| z \|^2,$$

де позначено

$$z(t) = \begin{pmatrix} G_x^{1/2}(t) x(t) \\ G_u^{1/2}(t) u(t) \end{pmatrix}, \quad z(T) = G_f^{1/2} x(T),$$

а норма $\| z \|^2$ визначена для вектора $z = \begin{pmatrix} z(t) \\ z(T) \end{pmatrix}$.

Вектор $z(t)$ можна представити і так

$$z(t) = \begin{pmatrix} G_x^{1/2}(t) \\ 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ G_u^{1/2}(t) \end{pmatrix} u(t) \tag{8}$$

і інтерпретувати його спільно з вектором $z(T)$ як регульовані величини.

Оскільки система (1) лінійна, то існує лінійний оператор, який відображає (перетворює) вектор зовнішніх вхідних впливів, що діють на систему і канал спостереження, в вектор регульованих величин z, тобто $z = R(\xi)$. З огляду на це, перетворимо вираз (6) $\sup_{\xi \in \Omega_\xi} I(u)$, який описує найбільш негативний вплив збурень на об'єкт керування в сенсі зростання значення критерію (3)

$$\sup_{\xi \in \Omega_\xi} I(u) = \sup_{\xi \in \Omega_\xi} \| z \|^2 = \sup_{\|\xi\|^2 \le 1} \| R(\xi) \|^2 = \sup_{\|\xi\| \le 1} \| R(\xi) \|^2 = \sup_{\xi,\, \xi \ne 0} \frac{\| R(\xi) \|^2}{\| \xi \|^2}. \tag{9}$$

Якщо позначити останній вираз (9) через γ^2, тобто

$$\sup_{\xi,\, \xi \ne 0} \frac{\| R(\xi) \|^2}{\| \xi \|^2} = \gamma^2$$

то отримаємо очевидну нерівність

$$\frac{\| R(\xi) \|^2}{\| \xi \|^2} < \gamma^2 \ \forall \xi \ (\| \xi \| \neq 0) \quad \text{або} \quad \frac{\| z \|^2}{\| \xi \|^2} < \gamma^2 \ \forall \xi \ (\| \xi \| \neq 0), \tag{10}$$

ліва частина якого може інтерпретуватися як відносна енергія вихідного сигналу z на вхідний вплив ξ, а права частина γ^2 – як граничне (максимально допустиме) значення цієї енергії.

Нерівність (10) лежить в основі теорії H^∞-керування [6]. Задача пошуку керування $u(t)$, що забезпечує виконання нерівності (10) при заданому значенні γ^2, відома як задача гасіння зовнішніх збурень [7]. Таким чином, вихідна задача мінімаксного керування тепер буде зведена до задачі H^∞ - керування.

Далі, відповідно до загальної методики пошуку H^∞-керування, вводимо в розгляд функціонал

$$J(u,\xi) = \| z \|^2 - \gamma^2 \| \xi \|^2 = I(u) - \gamma^2 \| \xi \|^2, \tag{11}$$

для якого знайдемо точку (u^*, ξ^*), що задовольняє умову

$$J(u^*, \xi^*) = \min_u \max_\xi J(u, \xi). \tag{12}$$

Вектор u^* – це шукане керування, при якому виконується нерівність (10) при заданому значенні γ^2, а ξ^* – найбільш несприятливі збурення.

Якщо керування u розглядати в якості конструктора, який намагається мінімізувати втрати, а збурення ξ – як природу, яка протистоїть конструктору і намагається максимізувати його втрати, то маємо динамічну ігрову задачу. Вона належить до класу диференціальних ігор з нульовою сумою і ціною гри, описуваної функціоналом $J(u,\xi)$. Якщо (u^*, ξ^*) – сідлова точка ігрової задачі, тобто точка, яка задовольняє умову

$$J(u^*, \xi) \le J(u^*, \xi^*) \le J(u, \xi^*),$$

то співвідношення (12) визначає верхнє значення ціни гри.

Для розв'язування задачі (12) перетворимо попередньо функціонал (11).
Підставляючи вирази (3) і (5) в (11), і враховуючи, що $\xi = (w, v, x_0)$, отримаємо

$$J(u,v,w,x_0) = x^T(T) G_f x(T) - \gamma^2 \left(x_0 - \hat{x}_0\right)^T R_0 \left(x_0 - \hat{x}_0\right) +$$
$$+ \int_{t_0}^{T} \left[x^T(t) G_x(t) x(t) + u^T(t) G_u(t) u(t) - \gamma^2 \left(w^T(t) R_w(t) w(t) + v^T(t) R_v(t) v(t) \right) \right] dt. \tag{13}$$

Тоді задача (12) перетворюється до наступного виразу

$$J(u^*, v^*, w^*, x_0^*) = \min_u \max_v \max_w \max_{x_0} J(u, v, w, x_0). \tag{14}$$

Розв'язування задачі (14) розіб'ємо на два етапи:

а) спочатку розв'яжемо проміжне завдання

$$J_0(u,v) = J(u, v, w^*, x_0^*) = \max_w \max_{x_0} J(u, v, w, x_0) \tag{15}$$

при фіксованих векторах u і v;

б) потім знайдемо остаточне оптимальне керування шляхом розв'язання наступної динамічної ігрової задачі

$$J(u^*, v^*, w^*, x_0^*) = \min_u \max_v J(u, v, w^*, x_0^*). \tag{16}$$

Ще раз перетворимо функціонал (13). Для цього, виражаючи вектор завад $v(t)$ з рівняння спостережень (2) і підставляючи його в (13), отримаємо

$$J(u,v,w,x_0) = \| x(T) \|^2_{G_f} - \gamma^2 \| x_0 - \hat{x}_0 \|^2_{R_0} +$$

$$+\int_{t_0}^{T} \left[\| x(t) \|^2_{G_x(t)} + \| u(t) \|^2_{G_u(t)} - \gamma^2 \left(\| w(t) \|^2_{R_w(t)} + \| y(t) - C(t)x(t) \|^2_{R(t)} \right) \right] dt, \quad (17)$$

де

$$R(t) = (F_v^{-1}(t))^T R_v(t) F_v^{-1}(t). \quad (17.1)$$

Оскільки параметри оптимізації завдання (15) різнорідні, тобто $w(t)$ – вектор-функція, а x_0 – вектор сталих, то для розв'язування цієї оптимізаційної задачі скористаємося методами варіаційного числення, а саме, використаємо необхідні і достатні умови екстремуму функціоналу (15), в яких фігурують і перша , і друга варіації. То ж зупинемося на методиці їх обчислення.

Варіація критерію якості задачі оптимального керування

Нехай керований об'єкт описується системою диференціальних рівнянь [8]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = f(x,u,t), & t_0 < t \le T, \\ x(t_0) = h(x_0), \end{cases} \quad (18)$$

де $x = x(t)$ – вектор стану, $u = u(t)$ – вектор керування, $f(x,u,t)$, $h(x_0)$ – відомі аналітичні вектор-функції відповідних розмірностей.

Розглянемо критерій якості функціонування об'єкта в наступному вигляді

$$J(u,x_0) = \varphi(x_0, x(T)) + \int_{t_0}^{T} g(x,u,t)dt, \quad (19)$$

де $\varphi(x_0, x(T))$, $g(x,u,t)$ – задані скалярні функції.

Завдання пошуку оптимального керування $u(t)$ і початкового стану x_0, які максимізують критерій (19), розглянемо в рамках оптимізаційної задачі

$$J(u,x_0) \to \max_{u,x_0}. \quad (20)$$

Для її розв'язку скористаємося методом множників Лагранжа, відповідно до якого введемо в якості критерію допоміжний функціонал

$$I(u,x_0,\lambda) = \varphi(x_0, x(T)) + \int_{t_0}^{T} g(x,u,t)dt + \int_{t_0}^{T} \lambda^T(t)\left(f(x,u,t) - \dot{x}\right)dt, \quad (21)$$

де $\lambda(t)$ – вектор-стовпчик множників Лагранжа.

Для зручності введемо також допоміжну скалярную функцію $H(x,u,\lambda,t)$, яку називають гамільтоніаном

$$H(x,u,\lambda,t) = g(x,u,t) + \lambda^T(t) f(x,u,t). \quad (22)$$

і беручи до уваги позначення (22), перетворимо функціонал (21)

$$I(u,x_0,\lambda) = \varphi(x_0, x(T)) - \lambda^T(T)x(T) + \lambda^T(t_0)h(x_0) + \int_{t_0}^{T} \left(H(x,u,\lambda,t) + \dot{\lambda}^T(t)x(t) \right) dt. \quad (23)$$

Для знаходження максимального значення функціоналу $I(u, x_0, \lambda)$ використана необхідна умова екстремуму першого роду, а саме, для того, щоб функціонал $I(u, x_0, \lambda)$ сягав свого екстремального значення, необхідно, щоб його варіація $\delta I(u, x_0, \lambda) = 0$ дорівнювала нулю для всіх варіацій $\delta u(t), \delta x_0$ і а вони не оберталися одночасно в нуль [9].

Знайдемо першу варіацію критерію (23), що відповідає варіаціям вектора керування і початкової умови x_0(при фіксованих t_0 і T)

$$\delta I(u, x_0, \lambda) = \left(\frac{\partial \varphi(x_0, x(T))}{\partial x_0} + \frac{\partial h^T(x_0)}{\partial x_0} \lambda(t_0) \right)^T \delta x_0 + \left(\frac{\partial \varphi(x_0, x(T))}{\partial x(T)} - \lambda(T) \right)^T \delta x(T) +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \left[\left(\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial x} + \dot{\lambda}(t) \right)^T \delta x(t) + \left(\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial u} \right)^T \delta u(t) \right] dt, \qquad (24)$$

де $\delta x(t)$–варіація стану $x(t)$, відповідна варіаціям початкового стану δx_0 і керування $\delta u(t)$.

Відзначимо, що при отриманні варіації (24) були використані наступні формули обчислення перших варіацій

$$\delta \varphi(x_0, x(T)) = \left(\frac{\partial \varphi(x_0, x(T))}{\partial x_0} \right)^T \delta x_0 + \left(\frac{\partial \varphi(x_0, x(T))}{\partial x(T)} \right)^T \delta x(T),$$

$$\delta H(x, u, \lambda, t) = \left(\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial x} \right)^T \delta x(t) + \left(\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial u} \right)^T \delta u(t),$$

$$\delta \left(h^T(x_0) \lambda(t_0) \right) = \left(\frac{\partial h^T(x_0)}{\partial x_0} \lambda(t_0) \right)^T \delta x_0 = \lambda^T(t_0) \left(\frac{\partial h^T(x_0)}{\partial x_0} \right)^T \delta x_0 .$$

З огляду на довільність варіацій δx_0 та $\delta u(t)$ (що не обертаються в нуль одночасно), з необхідної умови екстремуму ($\delta I(u, x_0, \lambda) = 0$) функціонала $I(u, x_0, \lambda)$ випливає

$$\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial x} + \dot{\lambda}(t) = 0, \quad \frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial u} = 0, \qquad (25)$$

$$\frac{\partial \varphi(x_0, x(T))}{\partial x_0} + \frac{\partial h^T(x_0)}{\partial x_0} \lambda(t_0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi(x_0, x(T))}{\partial x(T)} - \lambda(T) = 0, \qquad (26)$$

І при цьому ж з (25) випливає також, що

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial x} = -\frac{\partial g(x, u, t)}{\partial x} - \frac{\partial f^T(x, u, t)}{\partial x} \lambda(t), \qquad (27)$$

$$\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial u} = \frac{\partial g(x, u, t)}{\partial u} + \frac{\partial f^T(x, u, t)}{\partial u} \lambda(t) = 0. \qquad (28)$$

Таким чином, початковий стан x_0 і вектор керування $u(t)$ необхідно і напевно визначаються з рівнянь

$$\frac{\partial \varphi(x_0, x(T))}{\partial x_0} + \frac{\partial h^T(x_0)}{\partial x_0} \lambda(t_0) = 0, \qquad (29)$$

$$\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial u} = \frac{\partial g(x, u, t)}{\partial u} + \frac{\partial f^T(x, u, t)}{\partial u} \lambda(t) = 0, \qquad (30)$$

де вектори $x(t)$ та $\lambda(t)$ саме і є розв’язками наступної системи сполучених рівнянь (двоточкової крайової задачі)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,u,t), \qquad t_0 < t \le T, \\ x(t_0) = h(x_0), \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial f^T(x,u,t)}{\partial x}\lambda(t) - \dfrac{\partial g(x,u,t)}{\partial x}, \\ \lambda(T) = \dfrac{\partial \varphi(x_0, x(T))}{\partial x(T)}. \end{cases} \tag{32}$$

Для розв’язання даної оптимізаційної задачі також може бути використана необхідна умова екстремуму другого роду [10]: для того, щоб функціонал (21) досягав максимального значення, необхідно, щоб друга варіація $\delta^2 I(u, x_0, \lambda)$ була непозитивною, тобто $\delta^2 I(u, x_0, \lambda) \le 0$ для всіх, що одночасно не обертаються в нуль варіацій аргументів $\delta u(t)$ і δx_0.

Відзначимо, що друга варіація $\delta^2 I(u, x_0, \lambda)$ визначається наступною квадратовою формою

$$\delta^2 I(u, x_0, \lambda) = \delta x_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + \frac{\partial h^T(x_0)}{\partial x_0} \lambda(t_0) \right)^T \right] \delta x_0 +$$
$$+ \delta x^T(T) \left[\frac{\partial}{\partial x(T)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x(T)} \right)^T \right] \delta x(T) +$$
$$+ \int_{t_0}^{T} \left\{ \delta x^T(t) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \right] \delta x(t) + \delta x^T(t) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T \right] \delta u(t) + \right.$$
$$\left. + \delta u^T(t) \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \right] \delta x(t) + \delta u^T(t) \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T \right] \delta u(t) \right\} dt, \tag{33}$$

де $H = H(x, u, \lambda, t)$ – функція Гамільтона виду (22).

Достатня умова екстремуму функціоналу $I(u, x_0, \lambda)$ визначається нерівністю $\delta^2 I(u, x_0, \lambda) < 0$.

Для знаходження варіацій були використані формули векторного диференціювання [11].

Нагадаємо також другу необхідну умову екстремуму функціоналу, що використовує другу варіацію $\delta^2 I(u, x_0, \lambda)$ (і яка буде використовуватися в подальшому). Для того, щоб функціонал $I(u, x_0, \lambda)$ сягав свого екстремального значення, необхідно, щоб друга варіація $\delta^2 I(u, x_0, \lambda)$ була $\delta^2 I(u, x_0, \lambda) \le 0$ для всіх варіацій δx_0 и $\delta u(t)$, що одночасно не обертаються в нуль.

При пошуку другої варіації функціоналу надалі будемо також використовувати такі формули [12].

Зокрема, для скалярної функції векторного аргументу друга варіація визначається наступною квадратовою формою

$$\delta^2 f(x) = \delta x^T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)^T \right] \delta x \cdot$$

Розв'язок допоміжної оптимізаційної задачі (продовження)

Повернемося тепер до задачі пошуку максимального значення функціоналу (17). Для розв'язання цього завдання використовуємо метод множників Лагранжа, відповідно до якого введемо в розгляд функціонал

$$L(w,x_0,\lambda)=J(u,v,w,x_0)+\int_{t_0}^{T}\lambda^T(t)\left(A(t)x(t)+B(t)u(t)+F_w(t)w(t)-\dot{x}(t)\right)dt\,, \quad (34)$$

де $\lambda(t)$ – вектор множників Лагранжа, а функціонал $J(u,v,w,x_0)$ визначається за формулою (17).

Далі використовуємо необхідну умову екстремуму першого роду для функціоналу (34) ($\delta L(u,w,x_0)=0$). З огляду на те, що для нашої оптимізаційної задачі функції $f(x,w,t)$, $h(x_0)$, $\varphi(x_0,x(T))$, $g(x,w,t)$ дорівнюють

$$f(x,w,t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)+F_w(t)w(t)\,,\quad h(x_0)=F_0x_0\,,$$

$$\varphi(x_0,x(T))=x^T(T)G_fx(T)-\gamma^2\left(x_0-\widehat{x}_0\right)^TR_0\left(x_0-\widehat{x}_0\right),$$

$$g(x,w,t)=x^T(t)G_x(t)x(t)+u^T(t)G_u(t)u(t)-\gamma^2w^T(t)R_w(t)w(t)-$$
$$-\gamma^2\left(y(t)-C(t)x(t)\right)^TR(t)\left(y(t)-C(t)x(t)\right),$$

$$R(t)=(F_v^{-1}(t))^TR_v(t)F_v^{-1}(t)\,,$$

розв'язок задачі $\max\limits_{x_0,w}L(u,w,x_0)$ в силу необхідної умови екстремуму 1-го порядку знаходиться з рівнянь

$$\frac{\partial\varphi(x_0,x(T))}{\partial x_0}+\frac{\partial h^T(x_0)}{\partial x_0}\lambda(t_0)=0\,,$$

$$\frac{\partial g(x,w,t)}{\partial w}+\frac{\partial f^T(x,w,t)}{\partial w}\lambda(t)=0\,,$$

які перетворюються до вигляду

$$F_0^T\lambda(t_0)-2\gamma^2R_0(x_0-\widehat{x}_0)=0\,,$$
$$-2\gamma^2R_w(t)w(t)+F_w^T(t)\lambda(t)=0\,.$$

Звідси знаходимо співвідношення, які задовольняють шукані вектори $w(t)$ і x_0

$$x_0=\frac{1}{2}\gamma^{-2}R_0^{-1}F_0^T\lambda(t_0)+\widehat{x}_0\,, \quad (35)$$

$$w(t)=\frac{1}{2}\gamma^{-2}R_w^{-1}(t)F_w^T(t)\lambda(t)\,, \quad (36)$$

де вектор-функція $\lambda(t)$ є розв'язком наступної системи сполучених рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{d\lambda(t)}{dt}=-\dfrac{\partial f^T(x,w,t)}{\partial x}\lambda(t)-\dfrac{\partial g(x,w,t)}{\partial x},\\[2ex] \lambda(T)=\dfrac{\partial\varphi(x_0,x(T))}{\partial x(T)}.\end{cases}$$

Ця система після перетворень зводиться до наступної

$$\begin{cases}\dfrac{d\lambda(t)}{dt}=-A^T(t)\lambda(t)-2G_x(t)x(t)-2\gamma^2C^T(t)R(t)\left(y(t)-C(t)x(t)\right),\\[2ex] \lambda(T)=2G_fx(T),\end{cases} \quad (37)$$

де $x(t)$ – розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + F_w(t)w(t), \qquad t_0 < t < T, \\ x(t_0) = F_0 x_0, \end{cases} \tag{38}$$

Після підстановки співвідношень (35) і (36) в рівняння (38), отримаємо двоточкову крайову задачу

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & \frac{1}{2}\gamma^{-2}F_w(t)R_w^{-1}(t)F_w^T(t) \\ -2G_x(t) + 2\gamma^2 C^T(t)R(t)C(t) & -A^T(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} B(t)u(t) \\ -2\gamma^2 C^T(t)R(t)y(t) \end{pmatrix}, \tag{39}$$

з крайовими умовами

$$x(t_0) = \frac{1}{2}\gamma^{-2}F_0 R_0^{-1} F_0^T \lambda(t_0) + F_0 \hat{x}_0, \qquad \lambda(T) = 2G_f x(T). \tag{40}$$

При отриманні рівнянь (35), (36) і системи (37) були використані наступні формули

$$\frac{\partial \varphi(x_0, x(T))}{\partial x_0} = -2\gamma^2 R_0 (x_0 - \hat{x}_0), \qquad \frac{\partial \varphi(x_0, x(T))}{\partial x(T)} = 2G_f x(T),$$

$$\frac{\partial g(x,w,t)}{\partial x} = 2G_x x - 2\gamma^2\left(C^T RCx - C^T Ry\right), \qquad \frac{\partial g(x,w,t)}{\partial w} = -2\gamma^2 R_w w,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f^T(x,w,t)\lambda = A^T\lambda, \qquad \frac{\partial}{\partial w} f^T(x,w,t)\lambda = F_w^T \lambda, \qquad \frac{\partial}{\partial x_0} h^T(x_0)\lambda(t_0) = F_0^T \lambda(t_0).$$

Оскільки крайова задача (39) є лінійною, то можна припустити, що розв'язок можна буде подати у вигляді

$$x(t) = \hat{x}(t) + \frac{1}{2}\gamma^{-2}P(t)\lambda(t), \tag{41}$$

де $\hat{x}(t)$ і $P(t)$ –невідомі вектор і матриця, що підлягають визначенню.

Диференціюючи (41) і використовуючи спряжену систему (37), отримаємо

$$\frac{1}{2}\gamma^{-2}\left[\dot{P}(t) - PA^T - \gamma^{-2}PG_x P + PC^T RCP - AP - F_w R_w^{-1} F_w^T\right]\lambda + \\ + \left[-\gamma^{-2}PG_x\hat{x} + PC^T RC\hat{x} - PC^T Ry + \dot{\hat{x}} - A\hat{x} - Bu\right] = 0 . \tag{42}$$

Якщо покласти

$$\dot{P} = AP + PA^T - P\left(C^T RC - \gamma^{-2}G_x\right)P + F_w R_w^{-1} F_w^T, \tag{43}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \gamma^{-2}PG_x\hat{x} + PC^T R\left(y - C\hat{x}\right), \tag{44}$$

то (42) перетвориться в тотожність.

Знайдемо тепер початкові умови для рівнянь (43) і (44). Для цього підставимо в (41) $t = t_0$ і отримаємо вираз для початкових умов

$$x(t_0) = \hat{x}(t_0) + \frac{1}{2}\gamma^{-2}P(t_0)\lambda(t_0).$$

З огляду на (35) і початкові умови (37), останнє співвідношення перетворимо до вигляду

$$F_0\hat{x}_0 + \frac{1}{2}\gamma^{-2}F_0R_0^{-1}F_0^T\lambda(t_0) = \hat{x}(t_0) + \frac{1}{2}\gamma^{-2}P(t_0)\lambda(t_0),$$

звідки отримаємо

$$P(t_0) = F_0R_0^{-1}F_0^T, \quad \hat{x}(t_0) = F_0\hat{x}_0.$$

Таким чином, для визначення $P(t)$ і $\hat{x}(t)$ отримуємо наступні рівняння

$$\begin{cases} \dot{P} = AP + PA^T - P\left(C^TRC - \gamma^{-2}G_x\right)P + F_wR_w^{-1}F_w^T, \\ P(t_0) = F_0R_0^{-1}F_0^T, \end{cases} \tag{45}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \gamma^{-2}PG_x\hat{x} + PC^TR\left(y - C\hat{x}\right), \\ \hat{x}(t_0) = F_0\hat{x}_0. \end{cases} \tag{46}$$

Далі зробимо заміну змінних

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\gamma^{-2}\lambda(t)$$

і представимо оптимальні вектори x_0 і $w(t)$ у вигляді

$$x_0 = R_0^{-1}F_0^T\mu(t_0) + \hat{x}_0, \tag{47}$$

$$w(t) = R_w^{-1}(t)F_w^T(t)\mu(t), \tag{48}$$

где $\mu(t)$ – розв'язок наступної системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{d\mu(t)}{dt} = -A^T(t)\mu(t) - \gamma^{-2}G_x(t)x(t) - C^T(t)R(t)\left(y(t) - C(t)x(t)\right), \\ \mu(T) = \gamma^{-2}G_f x(T). \end{cases} \tag{49}$$

Перетворимо тепер систему (49) до виду, що залежить не від стану $x(t)$, а від $\hat{x}(t)$. Враховуючи, що

$$x(t) = \hat{x}(t) + P(t)\mu(t), \tag{50}$$

початкові умови для системи (49) перетворимо таким чином $\mu(T) = \gamma^{-2}G_f\left(\hat{x}(T) + P(T)\mu(T)\right)$,

звідки

$$\mu(T) = \left(\gamma^2E - G_fP(T)\right)^{-1}G_f\hat{x}(T).$$

Тоді сама система (49) приймає вигляд

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \left(-A^T(t) - \gamma^{-2}G_x(t)P(t) + C^T(t)R(t)C(t)P(t)\right)\mu(t) - \gamma^{-2}G_x(t)\hat{x}(t) - \\ - C^T(t)R(t)\left(y(t) - C(t)\hat{x}(t)\right).$$

В результаті отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{d\mu(t)}{dt} = \left(-A^T(t) - \gamma^{-2}G_x(t)P(t) + C^T(t)R(t)C(t)P(t)\right)\mu(t) - \gamma^{-2}G_x(t)\hat{x}(t) - \\ \qquad - C^T(t)R(t)\left(y(t) - C(t)\hat{x}(t)\right), \\ \mu(T) = \left(\gamma^2E - G_fP(T)\right)^{-1}G_f\hat{x}(T). \end{cases} \tag{51}$$

Використовуємо тепер необхідні умови оптимальності другого роду. Для цього знайдемо другу варіацію функціонала (34).

$$\delta^2 L(u,w,x_0) = -2\gamma^2 \delta x_0^T R_0 \delta x_0 + 2\delta x^T(T) G_f \delta x(T) + \\ +2\int_{t_0}^{T} \left\{ \delta x^T(t)\left(G_x(t) - \gamma^2 C^T(t) R(t) C(t)\right)\delta x(t) - \gamma^2 \delta w^T(t) R_w(t) \delta w(t) \right\} dt, \tag{52}$$

де $\delta\, x(t)$ – розв'язок рівняння в варіаціях

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A(t)\delta x(t) + F_w(t)\delta w(t), \\ \delta x(t_0) = F_0 \delta x_0. \end{cases} \tag{53}$$

Перетворимо співвідношення (52). Додамо до $\delta^2 L(u,w,x_0)$ вираз, що тотожно дорівнює нулю

$$-2\gamma^2 \left[\delta x^T(t) P^{-1}(t) \delta x(t) \Big|_{t_0}^{T} - \int_{t_0}^{T} \frac{d}{dt}\left(\delta x^T(t) P^{-1}(t) \delta x(t)\right) dt \right] = 0 \cdot$$

Тоді отримаємо

$$\delta^2 L(u,w,x_0) = -2\gamma^2 \delta x_0^T R_0 \delta x_0 + 2\delta x^T(T) G_f \delta x(T) + \\ +2\int_{t_0}^{T} \left\{ \delta x^T(t)\left(G_x(t) - \gamma^2 C^T(t) R(t) C(t)\right)\delta x(t) - \gamma^2 \delta w^T(t) R_w(t) \delta w(t) \right\} dt - \\ -2\gamma^2 \delta x^T(T) P^{-1}(T) \delta x(T) + 2\gamma^2 \delta x^T(t_0) P^{-1}(t_0) \delta x(t_0) + 2\gamma^2 \int_{t_0}^{T} \Big\{ \Big(\delta x^T(t) A^T(t) + \\ + \delta w^T(t) F_w^T(t) \Big) P^{-1}(t) \delta x(t) + \delta x^T(t) P^{-1}(t) \left(A(t)\delta x(t) + F_w(t)\delta w(t) \right) - \\ - \delta x^T(t) P^{-1}(t) \left(AP + PA^T - P\left(C^T R C - \gamma^{-2} G_x\right) P + F_w R_w^{-1} F_w^T \right) P^{-1}(t) \delta x(t) \Big\} dt = \\ = 2\gamma^2 \delta x_0^T \left[F_0^T \left(F_0 R_0^{-1} F_0^T\right)^{-1} F_0 - R_0 \right] \delta x_0 + 2\delta x^T(T) \left[G_f - \gamma^2 P^{-1}(T) \right] \delta x(T) - \\ -2\gamma^2 \int_{t_0}^{T} \left(\delta w(t) - R_w^{-1}(t) F_w^T(t) P^{-1}(t) \delta x(t) \right)^T R_w(t) \left(\delta w(t) - R_w^{-1}(t) F_w^T(t) P^{-1}(t) \delta x(t) \right) dt. \tag{54}$$

Зауважимо, що в цих перетвореннях було використано матричне рівняння

$$\frac{dP^{-1}(t)}{dt} = -P^{-1}(t) \frac{dP(t)}{dt} P^{-1}(t).$$

з якого випливає

$$\left(R_0 - F_0^T \left(F_0 R_0^{-1} F_0^T \right)^{-1} F_0 \right) \delta x_0 = 0 \cdot \tag{55}$$

А з (48) і (50) виходить

$$w(t) = R_w^{-1}(t) F_w^T(t) P^{-1}(t) \left(x(t) - \widehat{x}(t) \right),$$

звідки

$$\delta w(t) = R_w^{-1}(t) F_w^T(t) P^{-1}(t) \delta x(t). \tag{56}$$

З огляду на (55) і (56), друга варіація функціонала $\delta^2 L(u,w,x_0)$ набуде вигляду

$$\delta^2 L(u,w,x_0) = 2\delta x^T(T) \left[G_f - \gamma^2 P^{-1}(T) \right] \delta x(T).$$

Якщо матриця $G_f - \gamma^2 P^{-1}(T)$ буде негативно визначеною, тобто

$$G_f - \gamma^2 P^{-1}(T) < 0, \tag{57}$$

то $\delta^2 L(u,w,x_0)<0$, і значить, величини x_0 і $w(t)$, що визначаються співвідношеннями (47), (48), задовольняють не тільки необхідні, але й достатні умови екстремуму функціонала $L(u,w,x_0)$, тобто пара $(x_0, w(t))$ максимізує функціонал $L(u,w,x_0)$, а значить, і функціонал $J(u,v,w,x_0)$ при фіксованих керуванні u і збуренні v.

Знайдемо тепер значення функціоналу $J_0(u,v)=J(u,v,w,x_0)$ на екстремалях $(x_0, w(t))$, тобто при оптимальних значеннях x_0 и $w(t)$

$$J_0(u,v)=x^T(T)G_f x(T)-\gamma^2\mu^T(t_0)F_0R_0^{-1}F_0^T\mu(t_0)+$$
$$+\int_{t_0}^{T}\Big\{x^T(t)G_x(t)x(t)+u^T(t)G_u(t)u(t)-$$
$$-\gamma^2\mu^T(t)F_w(t)R_w^{-1}(t)F_w^T(t)\mu(t)-\gamma^2\big(y(t)-C(t)x(t)\big)^T R(t)\big(y(t)-C(t)x(t)\big)\Big\}dt.$$

Додаючи до цього виразу нульове значення

$$-\gamma^2\left[\mu^T(t)P(t)\mu(t)\Big|_{t_0}^{T}-\int_{t_0}^{T}\frac{d}{dt}\big(\mu^T(t)P(t)\mu(t)\big)dt\right]=0,$$

Одержим

$$J_0(u,v)=x^T(T)G_f x(T)-\gamma^2\mu^T(t_0)F_0R_0^{-1}F_0^T\mu(t_0)+$$
$$+\int_{t_0}^{T}\Big\{x^T(t)G_x(t)x(t)+u^T(t)G_u(t)u(t)-$$
$$-\gamma^2\mu^T(t)F_w(t)R_w^{-1}(t)F_w^T(t)\mu(t)-\gamma^2\big(y(t)-C(t)x(t)\big)^T R(t)\big(y(t)-C(t)x(t)\big)\Big\}dt-$$
$$-\gamma^2\mu^T(T)P(t)\mu(T)+\gamma^2\mu^T(t_0)P(t_0)\mu(t_0)+\gamma^2\int_{t_0}^{T}\Big\{\Big(-A^T(t)\mu(t)-\gamma^{-2}G_x(t)x(t)+$$
$$+C^T(t)R(t)\big(C(t)x(t)-y(t)\big)\Big)^T P(t)\mu(t)+\mu^T(t)P(t)\Big(-A^T(t)\mu(t)-\gamma^{-2}G_x(t)x(t)+$$
$$+C^T(t)R(t)\big(C(t)x(t)-y(t)\big)\Big)+\mu^T(t)\Big(A(t)P(t)+P(t)A^T(t)-$$
$$-P(t)\Big(C^T(t)R(t)C(t)-\gamma^{-2}G_x(t)\Big)P(t)+F_w(t)R_w^{-1}(t)F_w^T(t)\Big)\mu(t)\Big\}dt.$$

І після ряду подальших перетворень приходимо до виразу

$$J_0(u,v)=x^T(T)G_f x(T)-\gamma^2\mu^T(T)P(T)\mu(T)+ \tag{58}$$
$$+\int_{t_0}^{T}\Big\{\hat{x}^T(t)G_x(t)\hat{x}(t)+u^T(t)G_u(t)u(t)-\gamma^2\big(y(t)-C(t)\hat{x}(t)\big)^T R(t)\big(y(t)-C(t)\hat{x}(t)\big)\Big\}dt$$

.

Враховуючи, що

$$\mu(T)=\big(\gamma^2E-G_fP(T)\big)^{-1}G_f\hat{x}(T),$$

знайдем $x(T)$

$$x(T)=P(T)\mu(T)+\hat{x}(T)=\Big[E+P(T)\big(\gamma^2E-G_fP(T)\big)^{-1}G_f\Big]\hat{x}(T)=$$
$$=\big(E-\gamma^{-2}P(T)G_f\big)^{-1}\hat{x}(T).$$

Тоді можна тотожно отримати

$$x^T(T)G_f x(T) - \gamma^2\mu^T(T)P(T)\mu(T) = \widehat{x}^T(T)\Big[\left(E-\gamma^{-2}G_f P(T)\right)^{-1}G_f \times$$
$$\times\left(E-\gamma^{-2}P(T)G_f\right)^{-1} - \gamma^2 G_f\left(\gamma^2 E - P(T)G_f\right)^{-1}P(T)\left(\gamma^2 E - G_f P(T)\right)^{-1}G_f\Big]\widehat{x}(T) =$$
$$= \widehat{x}^T(T)\left(G_f^{-1}-\gamma^{-2}P(T)\right)^{-1}\Big[G_f^{-1}\left(G_f^{-1}-\gamma^{-2}P(T)\right)^{-1} - \gamma^{-2}P(T)\left(G_f^{-1}-\gamma^{-2}P(T)\right)^{-1}\Big]\widehat{x}(T) =$$
$$= \widehat{x}^T(T)\left(G_f^{-1}-\gamma^{-2}P(T)\right)^{-1}\widehat{x}(T).$$

Підставляючи останній вираз в функціонал (58) і роблячи заміни змінних

$$\widehat{v}(t) = y(t) - C(t)\widehat{x}(t), \tag{59}$$

$$S_T = \left(G_f^{-1}-\gamma^{-2}P(T)\right)^{-1}, \tag{60}$$

остаточно перетворимо функціонал до вигляду

$$J_0(u,\widehat{v}) = \widehat{x}^T(T)S_T\widehat{x}(T) + \int_{t_0}^{T}\left\{\widehat{x}^T(t)G_x(t)\widehat{x}(t) + u^T(t)G_u(t)u(t) - \gamma^2\widehat{v}^T(t)R(t)\widehat{v}(t)\right\}dt \cdot \tag{61}$$

Тепер нам належить розв'язати мінімаксну задачу

$$\min_u \max_{\widehat{v}} J_0(u,\widehat{v}) \tag{62}$$

за умови, що $\widehat{x}(t)$ задовольняє систему

$$\begin{cases}\dot{\widehat{x}}(t) = A_\gamma(t)\widehat{x}(t) + B(t)u(t) + Q_v(t)\widehat{v}(t),\\ \widehat{x}(t_0) = F_0\widehat{x}_0.\end{cases} \tag{63}$$

де

$$A_\gamma(t) = A(t) + \gamma^{-2}P(t)G_x(t), \quad Q_v(t) = P(t)C^T(t)R(t). \tag{64}$$

Для розв'язання цього завдання скористаємося результатами теорії лінійно-квадратичних диференціальних ігор.

Лінійно-квадратична диференціальна ігрова задача двох осіб

Розглянемо систему

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B_1(t)u_1(t) + B_2(t)u_2(t),\\ x(t_0) = x_0,\end{cases}$$

з критерієм

$$J(u_1,u_2) = x^T(T)Q_f x(T) + \int_{t_0}^{T}\left\{x^T(t)Q(t)x(t) + u_1^T(t)R_1(t)u_1(t) - u_2^T(t)R_2(t)u_2(t)\right\}dt,$$

де $x(t)$ – стан системи; $u_1(t)$, $u_2(t)$ – функціїкерування.

Матриці, що формують систему, і вагові матриці критерію відомі.

Необхідно знайти керування $u_1(t)$ і $u_2(t)$ з умови $\min\limits_{u_1}\max\limits_{u_2} J(u_1,u_2)$.

Вище був отриманий наступний результат. Оптимальна стратегія керування визначається функціями виду

$$u_1(t) = -R_1^{-1}(t)B_1^T(t)K(t)x(t), \quad u_2(t) = R_2^{-1}(t)B_2^T(t)K(t)x(t),$$

де $K(t)$ – розв'язок матричного диференціального рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{dK(t)}{dt} = -A^T(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)\big(S_1(t) - S_2(t)\big)K(t) - Q(t), \\ K(T) = Q_f, \end{cases}$$

в якому

$$S_i(t) = B_i(t)R_i^{-1}(t)B_i^T(t), \ i = 1,2.$$

При цьому мінімаксне значення критерію дорівнює

$$\min_{u_1}\max_{u_2} J(u_1,u_2) = x_0^T K(t_0)x_0.$$

Застосовуючи цей результат до задачі (61) - (64), отримуємо її розв'язок у вигляді

$$u(t) = -G_u^{-1}(t)B^T(t)S(t)\hat{x}(t), \tag{65}$$

$$\hat{v}(t) = \gamma^{-2}R^{-1}(t)Q_v^T(t)S(t)\hat{x}(t) = \gamma^{-2}C(t)P(t)S(t)\hat{x}(t), \tag{66}$$

$$J_0(u,\hat{v}) = \hat{x}_0^T F_0^T S(t_0)F_0\hat{x}_0, \tag{67}$$

де $S(t)$ – розв'язок матричного диференціального рівняння виду

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = -A_\gamma^T(t)S(t) - S(t)A_\gamma(t) - G_x(t) + \\ \qquad + S(t)\Big(B(t)G_u^{-1}(t)B^T(t) - \gamma^{-2}Q_v(t)R^{-1}(t)Q_v^T(t)\Big)S(t), \\ S(T) = S_T, \end{cases} \tag{68}$$

Підставляючи (65), (66) в (46) і (51), отримаємо

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \Big(A(t) + \gamma^{-2}P(t)G_x(t)\Big)\hat{x}(t) - \\ \qquad -\Big(B(t)G_u^{-1}(t)B^T(t) - \gamma^{-2}P(t)C^T(t)R(t)C(t)P(t)\Big)S(t)\hat{x}(t), \\ \hat{x}(t_0) = F_0\hat{x}_0. \end{cases} \tag{69}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\mu(t)}{dt} = -\Big(A(t) + \gamma^{-2}P(t)G_x(t)\Big)^T \mu(t) + C^T(t)R(t)C(t)P(t)\Big(\mu(t) - \gamma^{-2}S(t)\hat{x}(t)\Big) - \\ \qquad -\gamma^{-2}G_x(t)\hat{x}(t), \\ \mu(T) = \Big(\gamma^2 E - G_f P(T)\Big)^{-1} G_f\hat{x}(T) = \gamma^{-2}S_T\hat{x}(T). \end{cases} \tag{70}$$

Позначимо тепер праву частину другого рівняння системи (70) як

$$\eta(t) = \gamma^{-2}S(t)\hat{x}(t)$$

і знайдемо рівняння, яке задовольняє $\eta(t)$.

Використовуючи (68) і (69), можна показати, що

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta(t)}{dt} = \gamma^{-2}\left(\dfrac{dS(t)}{dt}\hat{x}(t) + S(t)\dfrac{d\hat{x}(t)}{dt}\right) = -\Big(A(t) + \gamma^{-2}P(t)G_x(t)\Big)^T \eta(t) - \gamma^{-2}G_x(t)\hat{x}(t), \\ \eta(T) = \gamma^{-2}S_T\hat{x}(T) \end{cases} \tag{71}$$

Зіставляючи рівняння (70) і (71), приходимо до висновку, що $\mu(t) = \eta(t)$, $t \in [t_0, T]$, звідки випливає

$$\mu(t) = \gamma^{-2}S(t)\hat{x}(t). \tag{72}$$

Підставимо тепер $u(t)$ і $\mu(t)$, що визначаються за формулами (65) і (72), в рівняння (39). Тоді, з урахуванням співвідношення (50), будемо мати

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + F_w(t)R_w^{-1}(t)F_w^T(t)\mu(t) - B(t)G_u^{-1}(t)B^T(t)S(t)\widehat{x}(t) = \\ \qquad = A(t)x(t) + \left(\gamma^{-2}F_w(t)R_w^{-1}(t)F_w^T(t) - B(t)G_u^{-1}(t)B^T(t)\right)S(t)\widehat{x}(t), \\ x(t_0) = \widehat{x}(t_0) + \gamma^{-2}P(t_0)S(t_0)\widehat{x}(t_0) = \left(E + \gamma^{-2}P(t_0)S(t_0)\right)\widehat{x}(t_0). \end{cases} \tag{73}$$

Позначимо

$$h(t) = \left(E + \gamma^{-2}P(t)S(t)\right)\widehat{x}(t).$$

Тоді, з урахуванням рівнянь (45), (68), (69), можна показати, що

$$\begin{cases} \dfrac{dh(t)}{dt} = A(t)h(t) + \left(\gamma^{-2}F_w(t)R_w^{-1}(t)F_w^T(t) - B(t)G_u^{-1}(t)B^T(t)\right)S(t)\widehat{x}(t), \\ h(t_0) = \left(E + \gamma^{-2}P(t_0)S(t_0)\right)\widehat{x}(t_0). \end{cases} \tag{74}$$

Порівнюючи системи (73) і (74), приходимо до висновку, що $x(t) = h(t)$, $t \in [t_0, T]$, і значить,

$$x(t) = \left(E + \gamma^{-2}P(t)S(t)\right)\widehat{x}(t). \tag{75}$$

Знайдемо тепер оптимальне значення для збурення в каналі вимірювання. З огляду на рівняння спостереження (2), і співвідношення (59), (66), (75), отримаємо

$$\begin{aligned} v(t) &= F_v^{-1}(t)\left(y(t) - C(t)x(t)\right) = F_v^{-1}(t)\left(\widehat{v}(t) + C(t)\widehat{x}(t) - C(t)x(t)\right) = \\ &= F_v^{-1}(t)\left(\gamma^{-2}C(t)P(t)S(t)\widehat{x}(t) + C(t)\left(\widehat{x}(t) - \left(E + \gamma^{-2}P(t)S(t)\right)\widehat{x}(t)\right)\right) = 0. \end{aligned} \tag{76}$$

Таким чином, оптимальне збурення $v(t) = 0$.

З огляду на співвідношення (72), перетворимо також оптимальні збурення x_0 і $w(t)$, що визначаються за формулами (47) і (48)

$$x_0 = R_0^{-1}F_0^T\mu(t_0) + \widehat{x}_0 = \gamma^{-2}R_0^{-1}F_0^TS(t_0)F_0\widehat{x}_0 + \widehat{x}_0 = \left(E + \gamma^{-2}R_0^{-1}F_0^TS(t_0)F_0\right)\widehat{x}_0, \tag{77}$$

$$w(t) = R_w^{-1}(t)F_w^T(t)\mu(t) = \gamma^{-2}R_w^{-1}(t)F_w^T(t)S(t)\widehat{x}(t). \tag{78}$$

У співвідношеннях, які визначають оптимальний розв'язок задачі H^∞-керування, використовується матриця, яка є розв'язком рівняння (68). Це рівняння можна розв'язати, знаючи матрицю $P(t)$, яка в свою чергу є розв'язком іншого матричного диференціального рівняння (45), тобто матриця $S(t)$ є залежною від матриці $P(t)$. Для того, щоб розірвати цю залежність введемо в розгляд наступну матрицю

$$Q(t) = S(t)\left(E + \gamma^{-2}P(t)S(t)\right)^{-1} = \left(E + \gamma^{-2}S(t)P(t)\right)^{-1}S(t) = \left(S^{-1}(t) + \gamma^{-2}P(t)\right)^{-1}. \tag{79}$$

З огляду на те, що $P(t)$ – розв'язок рівняння (45), а $S(t)$ – задовольняє рівняння (68), можна показати, що $Q(t)$ задовольняє матричне диференціальне рівняння виду

$$\begin{cases} \dfrac{dQ(t)}{dt} = -A^T(t)Q(t) - Q(t)A(t) - G_x(t) + \\ \qquad + Q(t)\left(B(t)G_u^{-1}(t)B^T(t) - \gamma^{-2}F_w(t)R_w^{-1}(t)F_w^T(t)\right)Q(t), \\ Q(T) = G_f, \end{cases} \quad (80)$$

Нескладно також показати, що умова обмеженості розв'язків (матриць) $P(t)$ та $S(t)$ і матричних диференціальних рівнянь (45) і (68)

$$G_f - \gamma^2 P^{-1}(T) < 0$$

еквівалентна такій умові

$$E - \gamma^{-2}Q(t)P(t) > 0\,, t \in [t_0, T]. \quad (81)$$

Тепер виразимо з рівняння (79) матрицю $S(t)$ через $Q(t)$

$$S(t) = \left(E - \gamma^{-2}Q(t)P(t)\right)^{-1}Q(t) = Q(t)\left(E - \gamma^{-2}P(t)Q(t)\right)^{-1} = \left(Q^{-1}(t) - \gamma^{-2}P(t)\right)^{-1}. \quad (82)$$

Тоді розв'язок задачі H^∞– керування остаточно можна представити таким чином

$$u(t) = -G_u^{-1}(t)B^T(t)Q(t)\left(E - \gamma^{-2}P(t)Q(t)\right)^{-1}\hat{x}(t)\,, \quad (83)$$

де член $\hat{x}(t)$ є розв'язком наступної системи

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}(t)}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + \gamma^{-2}P(t)G_x(t)\hat{x}(t) + P(t)C^T(t)R(t)\left(y(t) - C(t)\hat{x}(t)\right), \\ \hat{x}(t_0) = F_0\hat{x}_0. \end{cases} \quad (84)$$

І в свою чергу член $R(t)$ відповідно є

$$R(t) = (F_v^{-1}(t))^T R_v(t)F_v^{-1}(t)\,.$$

Матриці $P(t)$ і $Q(t)$ задовольняють наступні матричні рівняння типу Ріккаті

$$\begin{cases} \dfrac{dP(t)}{dt} = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + F_w(t)R_w^{-1}(t)F_w^T(t) - \\ \qquad - P(t)\left(C^T(t)R(t)C(t) - \gamma^{-2}G_x(t)\right)P(t), \\ P(t_0) = F_0R_0^{-1}F_0^T, \end{cases} \quad (85)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dQ(t)}{dt} = -A^T(t)Q(t) - Q(t)A(t) - G_x(t) + \\ \qquad + Q(t)\left(B(t)G_u^{-1}(t)B^T(t) - \gamma^{-2}F_w(t)R_w^{-1}(t)F_w^T(t)\right)Q(t), \\ Q(T) = G_f, \end{cases} \quad (86)$$

Оптимальне H^∞-керування відповідає мінімальному значенню $\gamma^2_{\min}$ параметра γ^2, при якому виконується умова (нерівність)

$$E - \gamma^{-2}Q(t)P(t) > 0\,, t \in [t_0, T], \quad (87)$$

де симетричні позитивно визначені матриці $P(t)$ і $Q(t)$ задовольняють відповідно системи (85) і (86).

Підкреслимо, що системи (85) і (86) розв'язуються незалежно одна від одної в прямому і зворотному часі. При цьому параметр γ^2 не може бути обраний довільно. Він повинен задовольняти умову $\gamma^2 > \gamma^2_{\min}$. В іншому випадку матриці $P(t)$ і $Q(t)$ стають необмеженими. Відзначимо, що значення $\gamma^2_{\min}$ можна знайти чисельно, наприклад, методом половинного ділення відрізка.

Зауважимо також, що $\gamma^2_{\min}$ – це мінімальне значення критерію (3) при найбільш несприятливих збуреннях, що діють на систему і в каналі спостереження. При цьому найгірші збурення визначаються співвідношеннями

$$x_0 = \left(E - \gamma^{-2} R_0^{-1} F_0^T Q(t_0) F_0\right)^{-1} \hat{x}_0, \tag{88}$$

$$w(t) = \gamma^{-2} R_w^{-1}(t) F_w^T(t) \left(E - \gamma^{-2} Q(t) P(t)\right)^{-1} Q(t) \hat{x}(t), \qquad v(t) = 0. \tag{89}$$

Примітка. За допомогою координатного перетворення

$$x_c(t) = \left(E - \gamma^{-2} P(t) Q(t)\right)^{-1} \hat{x}(t) \tag{90}$$

оптимальне H^∞ - керування можна представити у вигляді

$$u(t) = -G_u^{-1}(t) B^T(t) Q(t) x_c(t), \tag{91}$$

де $x_c(t)$ – вихід компенсатора

$$\begin{cases} \dfrac{dx_c(t)}{dt} = A x_c(t) + B u(t) + \gamma^{-2} F_w R_w^{-1} F_w^T Q x_c(t) + \left(E - \gamma^{-2} P Q\right)^{-1} P C^T R \left(y(t) - C x_c(t)\right), \\ x_c(t_0) = \left(E - \gamma^{-2} F_0 R_0^{-1} F_0^T Q(t_0)\right)^{-1} F_0 \hat{x}_0, \end{cases} \tag{92}$$

або

$$\begin{cases} \dfrac{dx_c(t)}{dt} = A_c(t) x_c(t) + B_c(t) y(t), \\ x_c(t_0) = x_c^0, \end{cases} \tag{93}$$

в якому позначено

$$\begin{aligned} A_c(t) = {} & A(t) - B(t) G_u^{-1}(t) B^T(t) Q(t) + \gamma^{-2} F_w(t) R_w^{-1}(t) F_w^T(t) Q(t) - \\ & - \left(E - \gamma^{-2} P(t) Q(t)\right)^{-1} P(t) C^T(t) R(t) C(t), \end{aligned} \tag{94}$$

$$B_c(t) = \left(E - \gamma^{-2} P(t) Q(t)\right)^{-1} P(t) C^T(t) R(t), \tag{95}$$

$$x_c^0 = \left(E - \gamma^{-2} F_0 R_0^{-1} F_0^T Q(t_0)\right)^{-1} F_0 \hat{x}_0. \tag{96}$$

При цьому найгірші збурення, що діють на систему, визначаються співвідношенням

$$w(t) = \gamma^{-2} R_w^{-1}(t) F_w^T(t) Q(t) x_c(t). \tag{97}$$

Висновки. Таким чином, мета статті, продекларована на початку роботи, досягнута, запропоновані розв'язки задачі пошуку оптимального керування в якості зворотного зв'язку за виходом, яке мінімізує інтегрально-квадратичний критерій функціонування в умовах невизначеності за найбільш несприятливих збурень. Результати досліджень представлені у вигляді практичних формул, згідно з якими допустимі відповідні розрахунки при моделюванні процесів керування в розглянутому лінійному динамічному нестаціонарному об'єкті з невизначеностями. Теорія автоматичного керування рухається в напрямку ускладнення досліджуваних явищ, процесів і зменшення інформації про систему керування, об'єкт, його особливості, властивості, характеристики, умови функціонування, невизначеності та зовнішні впливи. Враховуючи все вищезазначене, обраний напрям досліджень є перспективним і має високий рівень актуальності.

Список літератури

1. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. 281 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
3. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014. 560 с.
4. Якубович В.А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования. *ДАН СССР*. 1962. Т. 143. №6. С. 1304-1307.
5. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. LinearMatrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994. 193 p.
6. Chilali M., Gahinet P. H^{∞} design with pole placement constraints: An LMI approach. IEEE Trans. Automat. Contr., 1996. vol.41, pp. 358–367.
7. Ghaoui L.E., Niculescu S.I. Advances in linear matrix inequality methods in control. Advances in Design and Control. Philadelphia, PA: SIAM, 2000. 372 p.
8. Masubuchi I., Ohara A., Suda N. LMI-based controller synthesis: A unified formulation and solution. Int. J. Robust Nonlinear Contr., 1998, vol. 8, pp. 669–686.
9. Лобок О.П., Гончаренко Б.М., Савіцька Н.М. Мінімаксне управління в лінійних динамічних системах із розподіленими параметрами. *Журнал «Наукові праці НУХТ»*. 2015. Том 21, № 6. С.16-26.
10. Кириченко Н.Ф. Минимаксное управление и оценивание в динамических системах. *Автоматика и телемеханика*. 1982. №1. С. 32-39
11. Лобок А.П. Минимаксные регуляторы в системах с распределенными параметрами. *Моделирование и оптимизация сложных систем: Вестн. Киев. универ.*. 1983. Вып.2. С. 62-67.
12. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.

References

1. Balandin, D.V. & Kogan, M.M. (2007). *Sintez zakonov upravlenija na osnove linejnyh matrichnyh neravenstv [Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities]*. Moscow: Fizmatlit [in Russian].
2. Gantmaher, F.R. (2004). *Teorija matric [Matrix theory]*. Moscow: Fizmatlit [in Russian].
3. Poljak, B.T. & Hlebnikov, M.V. (2014). *Upravlenie linejnymi sistemami pri vneshnih vozmushhenijah: Tehnika linejnyh matrichnyh neravenstv [Control of linear systems under external disturbances: Technique of linear matrix inequalities]* . Moscow: LENAND [in Russian].
4. Jakubovich, V.A. (1962). Reshenie nekotoryh matrichnyh neravenstv, vstrechajushhihsja v teorii avtomaticheskogo regulirovanija [The solution of some matrix inequalities encountered in the theory of automatic regulation]. *DAN SSSR – DAN SSSU*, *Vol. 143*, *6*, 1304-1307 [in Russian].
5. Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. & Balakrishnan, V. (1994). *LinearMatrix Inequalities in System and Control*. Philadelphia: SIAM [in English].
6. Chilali, M. & Gahinet, P. (1996). H^{∞} design with pole placement constraints: An LMI approach. IEEE Trans. *Automat. Contr.*, *Vol.41*, 358-367 [in English].
7. Ghaoui, L.E. & Niculescu, S.I. (2000). Advances in linear matrix inequality methods in control. Advances in Design and Control. PA: SIAM [in English].
8. Masubuchi, I., Ohara, A. & Suda, N. (1998). LMI-based controller synthesis: A unified formulation and solution. *Int. J. Robust Nonlinear Contr.*, *Vol. 8*, 669–686 [in English].
9. Lobok, O.P., Honcharenko, B.M. & Savits'ka, N.M. (2015). Minimaksne upravlinnia v linijnykh dynamichnykh systemakh iz rozpodilenymy parametramy [Minimax control in linear dynamic systems with distributed parameters]. *Zhurnal «Naukovi pratsi NUKhT» – The Journal "Scientific Works of National University of Food Technologies"*, *Vol. 21, 6*, 16-26 [in Ukrainian].
10. Kirichenko, N.F. (1982). Minimaksnoe upravlenie i ocenivanie v dinamicheskih sistemah. *Avtomatika i telemehanika – Automation and Telemechanics*, *1*, 32-39 [in Russian].

11. Lobok, A.P. (1983). Minimaksnye reguljatory v sistemah s raspredelennymi parametrami. Vestn [Minimax controllers in distributed parameter systems]. *Modelirovanie i optimizacija slozhnyh system – Modelling and optimization of complex systems*, *Vol.2,* 62-67 [in Russian].
12. Vasil'ev, F.P. (1981). *Metody reshenija jekstremal'nyh zadach [Methods for solving extreme problems].* Moskow: Nauka [in Russian].

Oleksij Lobok, Assos. Prof., PhD of Phys.& Math. Sci., **Boris Goncharenko,** Prof. DSc.
National University of Food Technologies, Kyiv, Ukraine
Larisa Vihrova, Prof. PhD tech. sci.
Central Ukrainian National Technical University, Kropyvnytskyi, Ukraine

Reducing the Problem of Minimax Control of Linear non-Stationary Systems to a H^{∞}-Robust One by the Way of Dynamic Game

The problem of synthesis of minimax control for the dynamic, described by the linear system of differential equations (taking into account the state, controls, perturbations and initial conditions, with the given equation of observation inclusive) of objects functioning in accordance with the integral-quadratic quality criterion in uncertainty is solved in the work.

External perturbations, errors, and initial conditions were assumed to belong to a number of uncertainties. The task of finding optimal control in the form of a feedback object that minimizes the performance criterion is presented in the form of a minimum maximal uncertainty control problem. In the absence of ready-made solution paths, this problem is reduced to a H^{∞}-control problem under the most unfavorable disturbances, and in addition to a dynamic game problem with zero sum and a certain price for the game, and a strategy for solving it is proposed that offers a way to new results.

The problem of finding the optimal control and the initial state that maximize the quality criterion is considered in the framework of the optimization problem solved by the Lagrange multiplier method after introducing the auxiliary scalar function, the Hamiltonian. It is shown that to find the maximum value of the criterion, either the necessary condition of the extremum of the first kind can be used, which depends on the ratio of the first variation of the criterion and the first variations of the control vectors and the initial state, or also the necessary condition of the extremum of the second kind, which depends on the sign of the second variation. For the first and second variations, formulas are given that can be used for calculations.

It is suggested to solve the control search problem in two steps: search for an intermediate solution at fixed values of control vectors and errors, and then search for final optimal control. Consideration is also given to solving H^{∞}-optimal control for infinite control time with respect to the signal from the compensator output, as well as solving the corresponding Riccati matrix algebraic equations.

minimax control, robustness,systems with uncertainties, optimization, dynamic game,matrix form

Одержано (Received) 20.02.2020 *Прорецензовано (Reviewed) 15.04.2020*
Прийнято до друку (Approved) 19.10.2020